George Gamow
Marvin Stern

enigme matematice

Scanned with OKEN Scanner

Ei
9 12

GEORGE GAMOW — MARVIN STERN

ENIGME MATEMATICE

BIBLIOTECA CENTRALĂ
RAIONUL ...
5056

1961
EDITURA ŞTIINŢIFICĂ

Scanned with OKEN Scanner

GEORGE GAMOW & MARVIN STERN

PUZZLE — MATH

NEW YORK — THE VIKING PRESS
1958

Scanned with OKEN Scanner

PROLOG:

CUM A LUAT NAȘTERE CARTEA DE FAȚĂ

În vara anului 1956, unul dintre autorii acestei cărți (G. G.) se afla într-o călătorie la San Diego, în California, în calitate de consultant al societății de transporturi aeriene „Convair", unde celălalt autor (M. S.) deținea o funcție permanentă. Aveam de discutat împreună mai multe probleme și întrucît biroul unuia dintre noi (M. S.), situat la etajul al șaselea al clădirii principale era mai confortabil, celălalt (G. G.) ca să ajungă pînă aici, lua de obicei liftul de la etajul al doilea, unde se afla biroul său. În cursul acestor ascensiuni, unul dintre noi (G. G.) observă că atunci cînd ajungea la liftul de la etajul doi și apăsa pe buton, prima cabină care sosea mergea de obicei în direcția opusă celeia care îi era lui necesară, adică cobora. De fapt, cam în cinci cazuri din șase, prima cabină cobora și numai într-un caz din șase urca.

— Ascultă — se adresă unul către celălalt — fabricați oare în permanență cabine de ascensor pe acoperiș și le trimiteți jos pentru a fi depozitate la subsol?

— Ce idee stupidă — exclamă celălalt. Nici gînd să ne îndeletnicim cu așa ceva. Îți propun să controlezi cît de des vine prima cabină din direcția dorită atunci cînd părăsești biroul acesta de la etajul șase ca să te înapoiezi la etajul doi.

După cîteva săptămîni, subiectul acesta reveni în discuția noastră. Cu acest prilej, unul dintre noi își

Scanned with OKEN Scanner

exprimă părerea că prima observaţie era lipsită de sens, deoarece acum, ori de cîte ori chema liftul la etajul şase, în cinci cazuri din şase prima cabină, care sosea, urca, şi nu cobora. De data aceasta îi veni în minte o explicaţie cu totul alta decît aceea pe care mi-o dăduse înainte. Pesemne că această societate construia cabine de ascensor la subsol şi le trimitea pe acoperiş, de unde avioanele le transportau pe calea aerului...

— Dar — exclamă celălalt — nu ştiam că lucrăm la o întreprindere care construieşte cabine de ascensor... Bineînţeles — continuă el — adevărata explicaţie este foarte simplă. Dar mai întîi dă-mi voie să adaug că dacă n-aş fi ştiut cît de înaltă este această clădire, din informaţia pe care mi-ai dat-o aş fi putut să precizez acum că trebuie să aibă şapte etaje.

— Dar nici n-am pomenit măcar de înălţimea clădirii; am spus doar că de cîte ori iau cabina ascensorului în direcţia dorită îmi vine în minte această problemă.

— Bine, dar nu-ţi dai seama că aceasta-i o enigmă clasică şi că ea nu face decît să ilustreze deosebirea care există între frecvenţă şi fază?

După un scurt timp de gîndire, am găsit răspunsul (vezi povestirea intitulată *Mersul trenurilor,* pag. 39). Din aceste convorbiri ne-am dat seama că pe amîndoi ne interesau tot soiul de enigme matematice, din care fiecare cunoştea o sumedenie.

Am hotărît aşadar, să le adunăm într-o cărticică, în care fiecare enigmă să fie dată sub forma unei scurte povestiri. Fiecare enigmă istorisită este tipărită cu caractere obişnuite, iar răspunsul — cu litere

Scanned with OKEN Scanner

cursive. Cititorii care doresc să-şi pună la încercare priceperea de a dezlega enigmele trebuie să-şi întrerupă lectura atunci cînd textul începe cu litere cursive.

Vă urăm succes!

M. STERN
G. GAMOW

Landfall, Woods Hole, Massachusetts

5056
BIBLIOTE[illegible]NALĂ
[illegible]
RAION[illegible]

Scanned with OKEN Scanner

1

Marele Sultan

Scanned with OKEN Scanner

DOISPREZECE ÎNTR-UNUL

sau „O cîntărire în loc de douăspreceze"

Marele sultan Ibn-al-Kuz din Quasiababia şedea în vistieria sa şi privea plin de mulţumire la cei doisprezece saci mari de piele înşiraţi de-a lungul peretelui. Sacii conţineau monede mari de argint, reprezentînd dările adunate de oamenii vistieriei din cele douăsprezece provincii pe care le cîrmuia. Numele omului vistieriei din fiecare provincie era scris citeţ pe fiecare sac. Fiecare monedă cîntărea o livră* întreagă, şi cum toţi sacii erau aproape plini, conţineau o cantitate mare de argint.

Deodată străjile introduseră un om zdrenţăros care căzu în genunchi în faţa sultanului.

— Măria ta — exclamă omul, ridicînd rugător mîinile — am să-ţi dezvălui un lucru foarte însemnat.

— Atunci vorbeşte — spuse Ibn-al-Kuz.

— Sînt slujitorul unuia dintre emisarii tăi şi vreau să-ţi aduc la cunoştinţă marea trădare şi crimă pe care a săvîrşit-o acesta faţă de tine. Fiecare monedă din sacul pe care ţi l-a trimis cîntăreşte mai puţin cu cîte o uncie**. Eu sînt unul dintre cei care au frecat monedele cu o pînză aspră, sustrăgînd astfel cîte o uncie de argint de la fiecare din ele. Şi cum stăpînul meu m-a nedreptăţit, am hotărît să-ţi spun adevărul.

* 1 livră = 0,453 kg. — *N. R.*

** Aici este vorba de uncia comercială egală cu 1/16 dintr-o livră şi cu 28,34 g. — *N. R.*

Scanned with OKEN Scanner

— Cine este stăpînul tău? întrebă Ibn-al-Kuz, încruntîndu-se. Jur pe Allah că voi pune să-i taie capul chiar mîine, iar ţie îţi voi da o răsplată frumoasă.

— Este . . . începu omul.

În clipa aceea, un pumnal zvîrlit de o mînă nevăzută şuieră prin văzduh şi se înfipse în spinarea omului: acesta căzu mort la pămînt.

Se pare că sultanului nu i-ar fi fost de loc greu să afle care dintre cei doisprezece saci conţinea monedele mai uşoare, numai dacă, bineînţeles, ar fi avut un cîntar destul de precis cu care să poată distinge dintre monedele obişnuite de cîte 16 uncii pe cele care cîntăreau numai 15 uncii. Şi iată că sultanul avea un asemenea cîntar, ba chiar unul cît se poate de ciudat. Era alcătuit dintr-o platformă, pe care te puteai urca; aceasta avea un orificiu în care trebuia să introduci un ban. Aparatul nu indica greutatea pe un cadran, ci emitea un tichet tipărit în care se arăta greutatea exactă în livre şi uncii. Şi totuşi exista o dificultate, şi anume aceea că printre toate monedele sale, sultanul Ibn-al-Kuz avea *numai o singură* monedă potrivită pentru acest cîntar şi deci nu putea face decît o singură cîntărire. El putea să aşeze pe platformă orice fel de combinaţie de piese de argint luate din toţi sacii, dar pe tichetul tipărit nu putea să capete decît un singur răspuns, şi anume greutatea totală a combinaţiei respective.

Sultanul rămase mult timp adîncit în gînduri. Deodată îi fulgeră prin minte soluţia. Dacă toate monedele din toţi sacii ar fi avut aceeaşi greutate, cîntarul ar fi arătat întotdeauna un număr întreg de livre, indiferent de combinaţia de monede aşezate pe platformă. Dacă însă una din monede nu era reglemen-

tară şi cîntărea doar 15 uncii, cîntarul trebuia să înregistreze atîtea livre şi 15 uncii, cu alte cuvinte rezultatul trebuia să fie cu o uncie mai mic decît cel mai apropiat întreg. Dacă printre monedele puse pe cîntar se aflau două, trei sau mai multe nereglementare, numărul trebuia să difere cu două, trei sau mai multe uncii de cel mai apropiat întreg mai mare decît el. Sultanul se ridică de pe scaun şi aplecîndu-se deasupra sacilor luă o monedă din primul sac, două din al doilea, trei din al treilea şi aşa mai departe, terminînd cu douăsprezece monede luate din cel de-al doisprezecelea sac. El îngrămădi toate monedele pe platforma cîntarului şi introduse banul în orificiu. Cîntarul arătă un anumit număr de livre şi 9 uncii. Reieşea, aşadar, că şapte monede erau nereglementare şi trebuiau să provină din sacul al şaptelea.. Numele scris pe sacul acesta era Ali-ben-Usur. A doua zi în zori capul lui Ali se rostogoli la pămînt fără zăbavă.*

O PROBLEMĂ DE FAMILIE

Într-una din zile, marele sultan Ibn-al-Kuz s-a lovit de o problemă cu adevărat încurcată. Marele vizir insista pe lîngă el să dea nişte legi prin care să poată controla proporţia dintre bărbaţi şi femei în componenţa viitoarei populaţii a ţării. Această, deoarece se

* Trebuie menţionat că, oricare ar fi numărul sacilor cu monede de argint, problema poate fi rezolvată. Raţionamentul rămîne identic, dacă acest număr este mai mic decît 16. Se vede însă uşor că această restricţie nu este esenţială. Într-adevăr, calculînd în uncii greutatea totală a monedelor alese în modul descris mai sus, în ipoteza că toate aceste monede ar fi reglementare, şi scăzînd din rezultatul obţinut greutatea reală, indicată de cîntar, vom obţine numărul de ordine al sacului căutat. — *N. R.*

Scanned with OKEN Scanner

năşteau un număr aproximativ egal de copii de ambele sexe, iar bărbaţilor de neam care dispuneau de mijloace modeste, le venea tot mai greu să întreţină haremuri de proporţii corespunzătoare rangului lor.

Sultanul, deşi personal un adept convins al monogamiei, nu se putea opune nici vizirului şi nici religiei tradiţionale a ţării. Rămase cîtva timp pe gînduri încurcat, murmurînd ceva fără noimă despre şiruri la întîmplare. În cele din urmă chipul i se însenină de un zîmbet de mulţumire şi se adresă vizirului:

— Soluţia problemei este foarte simplă! Am să dau o lege prin care voi arăta tuturor femeilor din ţară că le va fi îngăduit să nască copii, dar numai cu condiţia ca aceştia să fie de sex feminin. De îndată ce o femeie va da naştere primului ei fiu, i se va interzice după aceea să mai nască copii. Nesocotirea acestei legi va fi pedepsită cu surghiunirea.

Continuînd să zîmbească, sultanul urmă:

— Cu siguranţă că aceasta va produce rezultatul pe care-l doreşti. Potrivit acestei noi legi, vei vedea femei care vor avea familia alcătuită din patru fete şi un băiat, altele din zece fete şi un băiat, iar altele poate dintr-un singur băiat, şi aşa mai departe. Aceasta va duce desigur, aşa după cum doreşti, la creşterea proporţiei femeilor faţă de bărbaţi.

Vizirul, care şedea foarte liniştit în timp ce sultanul îi explica propunerea, păru deodată că prinde a înţelege şi se ridică entuziasmat. Reuşise, în sfîrşit, să-l facă pe sultan să se încline în faţa lui. Îşi luă rămas bun de la sultan şi plecă în mare grabă să răspîndească ştirea izbînzii sale personale cu privire la făurirea viitorului ţării.

Tînărul prinţ asistase la această convorbire şi la

Scanned with OKEN Scanner

formularea noii legi. El se înfăţişă smerit şi cu lacrimi în ochi înaintea tatălui său.

— O, mărite sultan — strigă el cu glas rugător — de bunăseamă că nu ai să te supui toanelor acestui fanatic?

Sultanul chicoti şi-i spuse fiului său să se apropie.

— Crezi că m-am supus dorinţei lui neroade?

— Dar, tată . . .

— Ha, ha, ha, — rîse sultanul. Dă-mi voie să-ţi expiic adevăratul sens al legii pe care am decretat-o. De fapt, ea va continua să menţină o proporţie egală între bărbaţi şi femei.

— Dar cum asta, tată? Nu-nţeleg.

— *Încearcă şi gîndeşte în felul următor, spuse sultanul. Ca să simplificăm lucrurile, să presupunem că la un moment dat toate femeile din ţară dau naştere primului lor copil. Aceşti prim-născuţi vor avea o distribuţie egală: jumătate din ei vor fi băieţi iar jumătate fete. Aşadar, în acest prim stadiu, am păstrat proporţia de unu la unu.*

Legea însă cere ca jumătate din femei, şi anume cele care au avut băieţi, să nu mai aibă dreptul să nască a doua oară. Cealaltă jumătate din femei urmează să dea naştere unei a doua serii de copii. În această a doua serie vom avea iar o distribuţie pară; cu alte cuvinte, va fi acelaşi număr de băieţi şi de fete. De aceea, rezultatul primei şi celei de a doua serii la un loc continuă să arate proporţia de unu la unu între pruncii de sex masculin şi cei de sex feminin.

Din nou, jumătate dintre femeile din cea de a doua serie nu mai au dreptul să continue să nască, adică femeile care au născut băieţi. Femeile care au avut fete dau în continuare naştere la a treia serie de copii.

Scanned with OKEN Scanner

Şi de data asta jumătate din noii născuţi vor fi băieţi şi jumătate fete.

După cum vezi, proporţia se menţine. Întrucît în toate seriile de naşteri proporţia dintre fete şi băieţi este de unu la unu, atunci cînd aduni rezultatele tuturor seriilor, proporţia va rămîne tot timpul unu la unu.*

DATA EXECUŢIEI

Vizirul îl osîndi pe Abdul Kasim la spînzurătoare fiindcă furase o pîine.

De mult dorea el să scape de Abdul şi iată că acum se agăţă de această pricină neînsemnată. Dar din păcate, după lege condamnatul avea dreptul să ceară sultanului iertarea pedepsei — şi aceasta o putea face numai în ziua în care trebuia să aibă loc execuţia.

Şi fiindcă ştia că sultanul Ibn-al-Kuz îl va ierta pe Abdul, vizirul născoci un plan iscusit ca să înlăture această posibilitate. El dădu temnicerului, de faţă cu Abdul, porunci în legătură cu execuţia, indicînd şi săptămîna în care urma să aibă loc. Pe de altă parte însă, temnicerul fu învăţat să ia toate măsurile pentru ca Abdul să nu bănuiască ziua în care urma să fie spînzurat.

Vizirul îi spuse temnicerului în prezenţa lui Abdul:

— În fiecare zi îi vei aduce lui Abdul mîncarea de dimineaţă. Data execuţiei trebuie să o fixezi într-una din zilele săptămînii, dar în aşa fel încît el să nu o poată ghici şi să fie luat prin surprindere. Dacă în dimineaţa zilei pe care ai ales-o pentru execuţie, adu-

* Aceasta presupune probabilităţi egale şi independente, ceea ce din punct de vedere biologic nu este exact. — *N. A.*

cîndu-i mîncarea, el îţi va spune că aceasta e ziua în care urmează să fie spînzurat, explicîndu-ţi raţional chipul în care a dedus-o, atunci legea îi dă dreptul să ceară de îndată sultanului iertarea pedepsei. Dacă însă în dimineaţa aceleiaşi zile, cînd îi vei aduce masa el nu va fi în stare să-ţi demonstreze raţional că aceasta este ziua aleasă pentru execuţie, el va pierde acest drept şi-l vei putea spînzura chiar în după-amiaza acelei zile.

Vizirul plecă, iar Abdul şi temnicerul se retraseră ca să chibzuiască cum ar putea să afle cea mai probabilă zi a execuţiei. Pentru temnicer problema se complica: el trebuia să fixeze dinainte data execuţiei ca să poată face pregătirile necesare.

Acest plan mîrşav prin care i se lua lui Abdul dreptul de a cere iertare, datorită elementului surpriză pe care-l conţinea osînda, ajunse la urechile tînărului prinţ, care-l aduse la cunoştinţă tatălui său.

Sultanul îl chemă pe temnicer.

— Am auzit — spuse sultanul — că vizirul l-a osîndit pe Abdul la spînzurătoare şi că sentinţa a fost fixată în aşa fel încît să-l împiedice pe Abdul să ceară iertarea pedepsei. Este adevărat?

— Da, mărite sultan — răspunse temnicerul — dar te rog să mă crezi că nu sînt părtaş la aceasta. Eu ţin foarte mult la Abdul şi aş fi fericit să fac tot ceea ce este cu putinţă ca să-l ajut, dar, după cum vezi, mi-s mîinile legate.

— Bine — spuse sultanul — ştiu că eşti un om foarte învăţat.

— O, nu, mărite sultan. Caut să-mi însuşesc învăţăturile înţelepţilor şi îndeosebi principiile de logică pe care le-au enunţat, dar nu sînt decît la începutul acestui drum şi mai am încă foarte multe de învăţat.

5056

BIBLIOTECA ... ALĂ
RAIONULUI

— E bine de ştiut acest lucru — răspunse sultanul. — Cunoşti cumva principiul inducţiei finite?

— Da, mărite sultan.

— Bine, să lăsăm deocamdată asta şi să ne gîndim iar la sărmanul Abdul. Ai ales o zi pentru execuţie?

— Nu, încă nu. Mă mai gîndesc încă.

— După mine — continuă sultanul — îl poţi spînzura numai într-o zi dintr-o anumită săptămînă, care începe duminica şi sfîrşeşte sîmbăta. Mă întreb acum dacă poţi aştepta cu execuţia lui Abdul pînă sîmbătă, ultima zi a săptămînii?

Temnicerul rămase cîteva clipe pe gînduri şi apoi răspunse încet:

— Nu, cred că nu. Vezi, mărite sultan, Abdul e un om inteligent. Cunoscînd condiţiile sentinţei cu privire la execuţie, dacă mai e în viaţă sîmbătă dimnieaţa cînd am să-i aduc mîncarea, îmi va spune: „Ştiu, temnicerule, că intenţionezi să mă spînzuri astăzi, deoarece este ultima din zilele în care pot fi executat".

Şi acesta va fi adevărul — continuă temnicerul. Dacă mai e în viaţă sîmbătă dimineaţa, zi în care am ultima posibilitate de a-l executa, va şti precis că execuţia urmează să aibă loc în ziua aceea şi mi-o va spune. În felul acesta va avea dreptul să ceară iertarea pedepsei.

— Înţeleg, — chibzui sultanul. Prin urmare e sigur că atît dumneata, cît şi Abdul trebuie să vă daţi seama că, potrivit condiţiei cuprinse în sentinţă, execuţia nu va putea deci avea loc sîmbătă.

— Da — încuviinţă temnicerul — îl voi putea executa pe Abdul numai într-una din zilele cuprinse între duminică şi vineri, sîmbătă în niciun caz.

Scanned with OKEN Scanner

— Atunci — continuă sultanul — dumneata şi Abdul puteţi şterge ziua de sîmbătă din calendarele voastre. Îl poţi executa numai începînd de duminică pînă vineri şi atunci vineri va fi ultima din zilele admisibile pentru a-l spînzura pe Abdul.

— Da, — răspunse temnicerul.

— Mă întreb atunci, — grăi sultanul, dacă ai să poţi aştepta pînă vineri?

După o nouă clipă de cumpănire, temnicerul răspunse:

— Ştiu că n-am să pot. Întrucît atît Abdul cît şi eu vom şti amîndoi că vineri este ultima zi admisibilă pentru execuţie, dacă Abdul va fi în viaţă în dimineaţa zilei de vineri, cînd voi intra la el, îmi va declara că mă pregătesc să-l spînzur în ziua aceea.

— Da, înţeleg raţionamentul tău — răspunse sultanul. Vrei să spui atunci că nu-l poţi executa decît începînd de duminică pînă joi şi că Abdul trebuie să-şi dea seama de acest lucru?

— Da, cu siguranţă — răspunse temnicerul.

— Dacă aşa stau lucrurile — urmă sultanul — iar joia devine ultima din zilele admisibile pentru execuţie, nu putem folosi acelaşi argument şi să excludem astfel şi ziua de joi?

— Fireşte că da — exclamă temnicerul — şi aceasta ar lăsa miercurea ca ultimă zi admisibilă, care la rîndul ei va fi eliminată şi tot aşa mereu înapoi pînă se va scurge întreaga săptămînă. Prin urmare execuţia e cu neputinţă.

Aceasta este într-adevăr o aplicare a principiului inducţiei finite. Ceea ce am dovedit efectiv este că

Scanned with OKEN Scanner

ultima din zilele admisibile pentru execuţie devine în mod automat inadmisibilă.

— Da, spuse sultanul, rîzînd, şi din această pricină se poate argumenta cu succes imposibilitatea executării sentinţei în orice interval de timp cuprinzînd un număr finit de zile. Noroc însă că atît dumneata cît şi Abdul sînteţi la fel de inteligenţi, căci dacă vreunul din voi n-ar fi înţeles acest raţionament, nu l-ar fi putut aplica în practică.

A DOUA ÎNCERCARE A LUI ABDUL*

După miraculoasa lui salvare istorisită în povestirea precedentă, peste Abdul a dat din nou năpasta. De data aceasta era acuzat că se îndeletnicea cu tîrgul negru de sclave, care fusese de curînd scos în afara legii de sultanul Ibn-al-Kuz. De astă dată Abdul trebuia să fie judecat de un juriu, o inovaţie introdusă de potentatul care se străduia să-şi transforme ţara într-un stat modern. Juriul, alcătuit din şase bărbaţi şi şase femei, era în divergenţă asupra verdictului; toate cele şase femei îl socoteau vinovat şi cereau pedeapsa capitală, dar cei şase bărbaţi îl considerau nevinovat.

Din această pricină judecătorul hotărî să i se acorde lui Abdul şanse egale de viaţă sau de moarte. Hotărîrea trebuia să fie luată prin scoaterea unei bile dintr-o urnă. Pentru această metodă neobişnuită de pronunţare a hotărîrii curtea procură două urne mari, fiecare din ele conţinînd cîte douăzeci şi cinci de bile albe şi douăzeci şi cinci de bile negre. I se legară deţinutului ochii. Acesta trebuia să întindă mîna şi să

* Comunicată de dr. Albert Szent-Györgyi.

Scanned with OKEN Scanner

aleagă una din urne din care trebuia să ia una din bile. O bilă neagră însemna moartea, una albă, viaţa. Bineînţeles, urnele trebuiau să fie mutate din locul lor, iar bilele cuprinse în amîndouă urmau să fie bine amestecate, după ce mai înainte i s-ar fi legat deţinutului ochii.

— O, mărite judecător — exclamă Abdul — căzînd în genunchi în faţa băncii, îngăduie-mi o ultimă rugăminte. Dă-mi voie să redistribui bilele între cele două urne înainte de a mi se lega ochii şi de a trebui să aleg urna şi bila.

— Crezi că aceasta i-ar putea mări şansele de a scăpa de pedeapsă? — întrebă judecătorul, întorcîndu-se spre vizir, care şedea lîngă el.

— Nu cred, — spuse vizirul, care se considera neîntrecut în probleme de matematică. Sînt cincizeci de bile negre şi cincizeci albe şi, deoarece el nu poate să le vadă, şansele rămîn aceleaşi, indiferent cum sînt distribuite între cele două urne sau între orice număr de urne.

— Atunci, — spuse judecătorul, deoarece nu va fi nici o deosebire, de ce să nu-i primim cererea, chiar de-am face-o numai ca să-i arătăm măritului nostru sultan că noul lui tribunal are, potrivit dorinţelor lui, tendinţe liberale?

— Haide, redistribuie bilele — îi spuse el lui Abdul, care aştepta tot îngenuncheat în faţa lui.

Abdul se ridică şi apropiindu-se de masă, întinse mîna spre urne. Procedeul lui era cît se poate de simplu. Mai întîi răsturnă toate bilele dintr-una din urne în cealaltă şi apoi, alegînd din grămadă o bilă albă, o aruncă înapoi în prima urnă. Această ingenioasă reîmpărţire îi spori cu aproape 75% şansa de

Scanned with OKEN Scanner

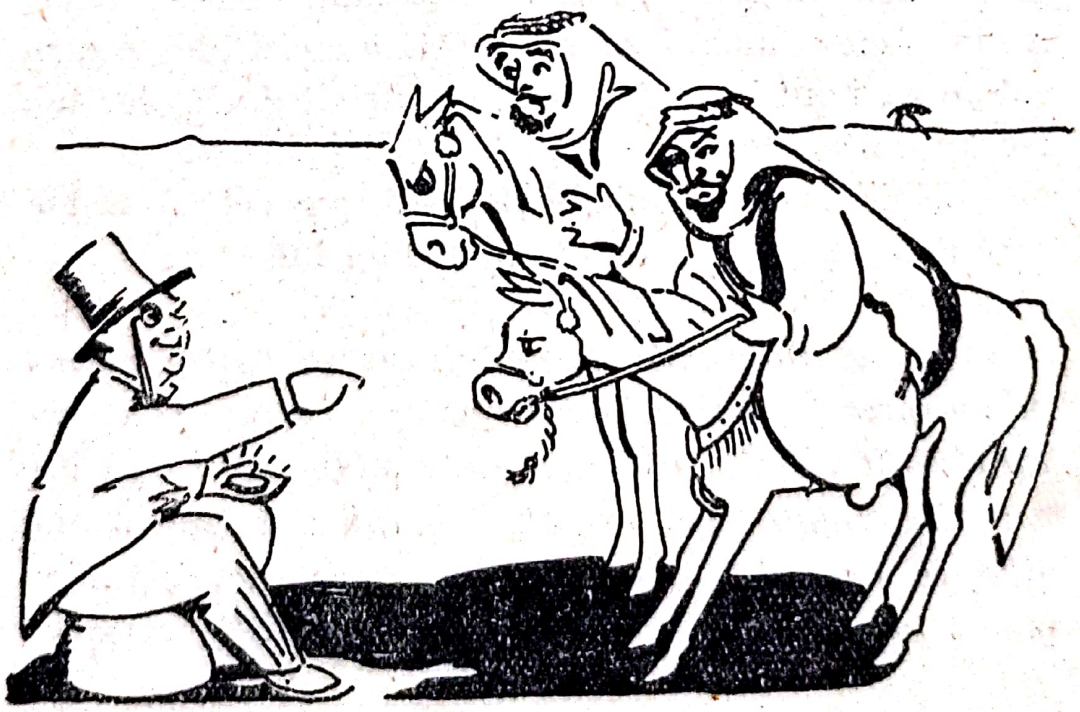
a trăi. După ce a fost legat la ochi, avea 50% şansă de a alege urna conţinînd bila albă, iar dacă nimerea urna cealaltă, mai avea încă 49 din 99 de posibilităţi (adică aproape 50%) de a nimeri o bilă albă în loc de una neagră.

Povestirea nu menţionează dacă această sporire a şanselor favorabile i-a îngăduit lui Abdul să-şi salveze viaţa.

O CURSĂ DE CAI NEOBIŞNUITĂ

Într-o zi însorită, aşa cum sînt toate zilele în această parte a globului, un englez şedea pe o stîncă în mijlocul unui deşert de pe domeniul sultanului Ibn-al-Kuz. Era plictisit fiindcă n-avea ce face, deşi buzunarele îi erau pline de bani ca să-şi plătească orice fel de distracţie. De aceea, cînd, spre marea lui bucurie, zări doi beduini călări, le făcu semn să se apropie.

— Prieteni — le spuse el, arătîndu-le o guinee de aur strălucitoare — aş vrea să faceţi o cursă pînă la



palmierul de colo. Aceluia dintre voi al cărui cal va sosi ultimul, am să-i dau moneda aceasta de aur.

— Al cărui cal va sosi ultimul!... exclamară beduinii.

— Întocmai. Este într-adevăr o condiţie neobişnuită, dar tocmai asta vreau. Şi acum porniţi!

Dornici dè a cîştiga banul, cei doi beduini porniră spre palmierul îndepărtat, şi fiindcă fiecare din ei încerca să-şi frîneze calul, înaintau foarte încet. Cînd erau tocmai gata să renunţe la cursă, le ieşi pe neaşteptate în cale un derviş. Beduinii săriră de pe cal, prosternîndu-se înaintea lui, în nisipul fierbinte al deşertului.

— Ce necaz aveţi, fiii mei? întrebă domol dervişul.

Ei îi explicară pricina.

— Poate că ar trebui să frîngem moneda, sau să ne înţelegem ca acela al cărui cal va sosi ultimul şi care va cîştiga astfel cursa să dea şi celuilalt din cîştigul său — dădu ideea unul din ei.

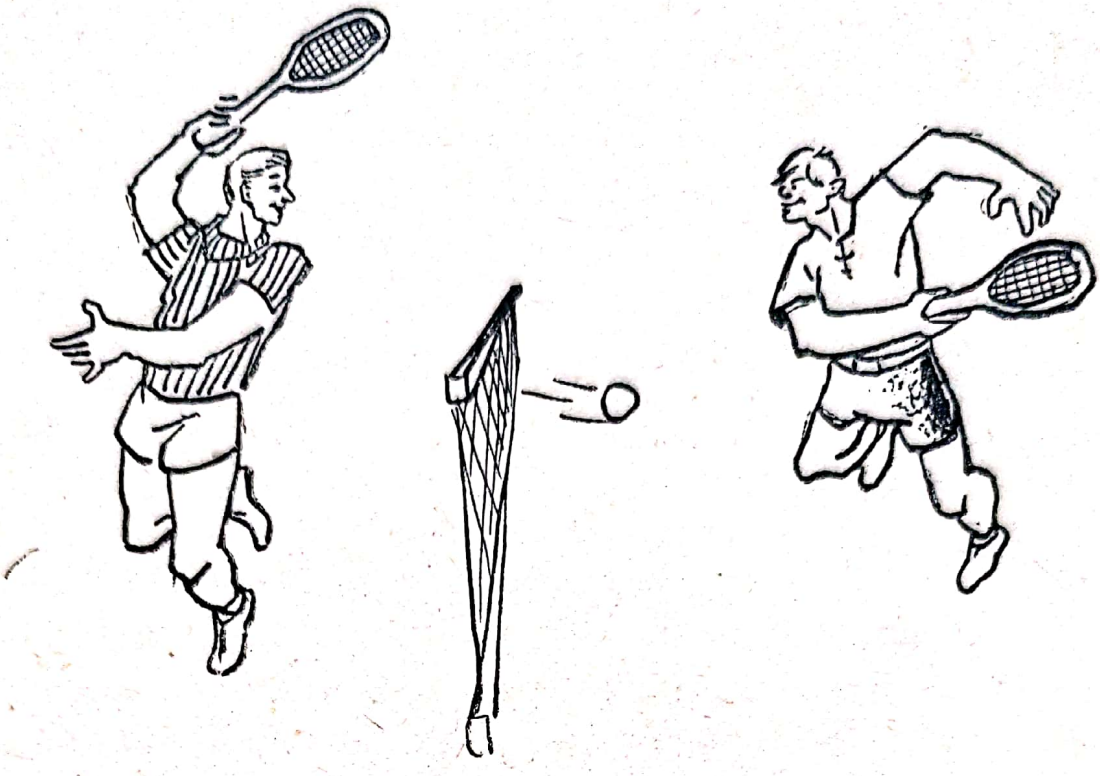
— Ba nu! — spuse dervişul. Trebuie să fii cinstit în toate, pînă şi cu englezii. Dar iată ce puteţi face. Şi le şopti îndată la ureche sfatul său.

— Alah să te binecuvinteze! — exclamară beduinii sărind în şa şi dînd pinteni cailor.

Apoi galopară pînă la palmier mai iute ca vîntul. Soarta cursei fu hotărîtă în cîteva clipe, iar englezul trebui să plătească guineea cîştigătorului. Ce le spusese dervişul?

Ceva foarte simplu: el îi sfătuise să schimbe caii între ei.

Scanned with OKEN Scanner



2

Probabilităţi... Probabilităţi...

Scanned with OKEN Scanner

Unul din obiceiurile rele ale lui Sam era pasiunea pentru jocurile de noroc.

Sam avea însă o inimă bună. Făgăduise soţiei lui că va da fiului său o educaţie potrivită şi-l va feri de jocurile de noroc. Şi îşi ţinu făgăduiala. El se gîndi că fiul său trebuie să fi moştenit ceva din însuşirile sale de „calculator“ şi cine putea, în zilele noastre, să se bucure de mai mult respect decît un savant în domeniul matematicii?

Aşadar, Sam Junior a fost trimis la universitate.

Tatăl lui era foarte mîndru de progresele făcute de fiul său în domeniul matematicii. Stînd de vorbă cu el, pe cînd era în ultimul său an de şcoală, Sam fu încîntat să afle că multe din calculele întrebuinţate în fizica modernă puteau să explice ştiinţific socotelile pe care el le făcea în timpul jocului. Vrînd să-şi demonstreze marea sa experienţă în ghicirea şanselor, Sam îi ţinu fiului său o lungă cuvîntare.

Tînărul încercă însă să-i explice că de fapt era vorba de teoria probabilităţilor într-o măsură mult mai mare decît bănuia Sam. El i-a demonstrat aceasta, folosind în bună parte o tehnică matematică complicată. Chiar şi în cazurile cele mai simple de stabilire a şanselor, în care Sam era foarte priceput, fiul său îl întreba dacă a înţeles într-adevăr principiile fundamentale ale teoriei probabilităţilor.

— De exemplu — spuse Sam Junior — să considerăm următorul joc. Pun trei cartoane colorate într-o

Scanned with OKEN Scanner

pălărie: unul este de culoare roşie pe ambele feţe, altul este alb tot pe ambele feţe şi ultimul, roşu pe o faţă şi alb pe cealaltă.

Să presupunem că trag un carton. Scot unul cu faţa roşie deasupra. Nu ştim ce culoare are pe cealaltă faţă.

— Trebuie să ghicesc culoarea de pe faţa cealaltă? întrebă Sam.

— Da — răspunse Sam Junior. Trebuie să-mi spui care sînt şansele ca acest carton să aibă şi cealaltă faţă roşie. Vezi — continuă el — dacă am scos cartonul cu faţa cea roşie, atunci avem unul din cele două cartoane posibile: ori cartonul cu ambele feţe roşii, ori cel roşu-alb. Nu-i aşa?

— Da, aşa e.

— Bine, atunci care sînt şansele ca acesta să fie cartonul cu ambele feţe roşii — întrebă Sam Junior.

— Eh — spuse Sam plictisit de simplitatea problemei — din moment ce sînt numai două cartoane posibile, avem pur şi simplu unu la două şanse ca să fie cartonul roşu pe ambele feţe.

— Ştiam că aşa vei răspunde, dar nu este corect.

— De aceea a insistat mama ta să te trimit la universitate! exclamă Sam. Îţi închipui poate că vei ajunge să-mi dai lecţii în privinţa ghicirii şanselor. Asta n-are nimic de-a face cu matematica; aici e vorba doar de bun simţ.

— *Vezi — continuă Sam Junior cu răbdare — această chestiune implică numai o definiţie corectă a termenului de „probabilitate“. Răspunsul tău că ar fi unul din două cartoane şi că, prin urmare, şansele care rezultă ar fi unu la doi, nu ţine seama de condiţiile problemei. Am arătat mai înainte că am tras un carton cu faţa roşie. Pentru a stabili probabilitatea ca acest carton să fie cel roşu pe ambele feţe, trebuie mai*

Scanned with OKEN Scanner

întîi să-mi pun întrebarea în cîte moduri pot trage un carton cu fața roșie în afară.

— Întocmai — spuse Sam — dar întrucît ar schimba oare aceasta răspunsul?

— Uite — continuă Sam Junior — cartoanele introduse în pălărie însumează un total de trei fețe roșii; adică cele două fețe roșii ale cartonului roșu pe ambele fețe și una roșie a cartonului cu fețele roșie și albă.

— Desigur — spuse Sam.

— Atunci ești de acord că există trei moduri posibile de a scoate un carton cu fața roșie la vedere?

— Da, da, sînt de acord.

— Hai să examinăm aceste trei moduri posibile de a trage un astfel de carton. Într-un caz, cartonul ar avea cealaltă față albă, și anume atunci cînd aș fi tras cartonul cu o față roșie și una albă. Așadar, în celelalte două cazuri, cartonul trebuia să fie roșu pe partea cealaltă, indiferent de modul în care am tras cartonul roșu pe ambele fețe. Așadar, vezi că din aceste trei moduri posibile de a scoate un carton cu fața roșie în sus, în două cazuri cartonul va avea cealaltă față roșie și numai într-un caz va avea fața cealaltă albă. Prin urmare, șansele ca acel carton pe care îl țin să fie cu ambele fețe roșii trebue să fie doi din trei.

— Ei — răspunse Sam îngîndurat — vrei să mă duci cu vorba, dar nu prea cred că m-ai convins.

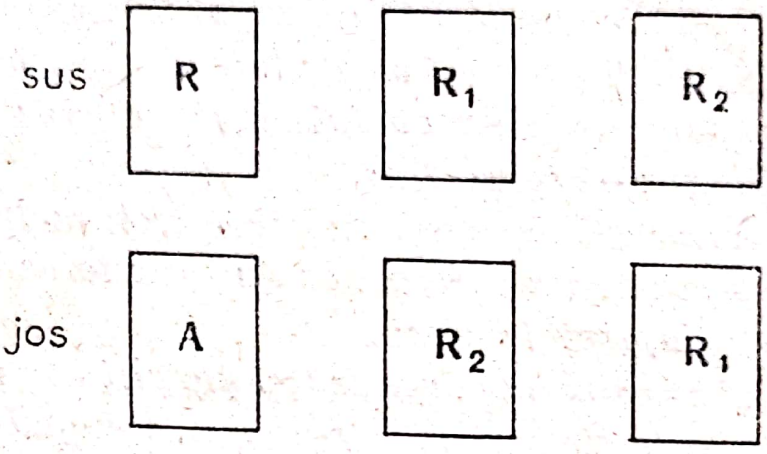
— Pot să ți-o demonstrez și pe altă cale — spuse Sam Junior. Dacă ai fi acceptat să joci cu mine jocul acesta presupunînd că am tras cartonul cu fața roșie deasupra, atunci puteam tot atît de bine să-l jucăm presupunînd că aș fi tras cartonul cu fața albă la vedere.

— Da, nu e nici o diferență — spuse Sam.

— Dar în acest nou joc — continuă Sam Junior —

Scanned with OKEN Scanner

dacă trăgeam cartonul cu faţa roşie deasupra, mi-aş fi pus întrebarea care erau şansele ca acesta să fie cartonul roşu pe ambele feţe, iar dacă trăgeam un carton cu faţa albă deasupra, m-aş fi întrebat care sînt şansele ca să fi dat de cartonul alb pe ambele feţe. Aci



poţi vedea într-adevăr cum se pune problema. Jocul este acelaşi, fie că e jucat pe alb, fie pe roşu. Jucînd ambele jocuri simultan (roşu sau alb) trebuie să obţinem aceeaşi probabilitate care rezultă şi în cazul unui singur joc, dar cînd se joacă amîndouă deodată, soluţia îţi sare în ochi. Ceea ce vreau să întreb de fapt este: care sînt şansele ca din cele trei cartoane să scoţi un carton care să aibă aceeaşi culoare pe ambele feţe, faţă de cele de a trage unul care are fiecare faţă de altă culoare? Şi în cazul acesta, răspunsul este, bineînţeles, doi la unu, deoarece sînt două cartoane din trei care au ambele feţe de aceeaşi culoare.

ALTE PROBABILITĂŢI

— Iţi mai dau un exemplu interesant. Anul trecut, la universitate, am fost siliţi cu toţii să urmăm un curs stupid care nu contribuia cu nimic la instruirea

Scanned with OKEN Scanner

noastră. Era vorba de o materie depăşită, care nu fusese încă scoasă din învăţămînt. Insuşi profesorul care ne-o preda îşi cerea mereu scuze că ne face să pierdem timpul de pomană. Ca să ne consoleze însă, la începutul semestrului ne anunţă că în loc de calificative ne va nota, fie cu A, fie cu B. Deci nu mai trebuia să ne frămîntăm şi din pricina notelor, ci doar pentru pierderea de timp.

Profesorul ţinu însă cu orice preţ să fie drept şi, din această cauză, la sfîrşitul semestrului, cînd trebuia să pună notele, se născu o problemă. Avea de gînd să pună o serie de A şi de B. Dar el voia să le distribuie la întîmplare, între studenţi, astfel încît fiecare să aibă o şansă egală de a căpăta fie un A, fie un B.

El se gîndi că ar putea să facă acest lucru parcurgînd de sus în jos lista studenţilor, iar în dreptul fiecărui nume să dea cu banul pentru a afla ce notă să-i pună: A sau B. Dar, pînă să se apuce s-o facă, îi trecu prin minte o idee, şi anume: dacă banul era puţin mai greu într-o parte? Aceasta va provoca desigur o denaturare prestabilită şi el nu va fi în măsură să dea notele „corecte".

Problema constă deci din a şti cum s-ar putea acorda la întîmplare note de A sau de B aruncînd o monedă care putea fi mai grea într-o parte, în aşa fel încît fiecare student să aibă şanse egale de a căpăta unul din aceste două calificative.

Sam spuse rîzînd:

— Întotdeauna am bănuit că aşa se dau uneori la noi notele, totuşi niciodată nu mi-a trecut prin cap că ele ar putea depinde de greutatea mai mică, într-o parte sau într-alta, a unei monede.

Sam Junior rîse şi el.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă totuşi profesorul nu şi-a ridicat în cap studenţii este pentru că el a încercat să fie „corect". Văzînd că aruncînd moneda de două ori iese la fel, atunci a mai încercat încă de două ori. Rezultatul ar fi fost valabil numai dacă la aruncare ar fi ieşit mai întîi „stema" şi pe urmă „banul", sau mai întîi „banul" şi pe urmă „stema". A-ul sau B-ul s-ar fi acordat după ceea ce ar fi ieşit mai întîi.

Să explic cum stau lucrurile.

Să presupunem că la fiecare aruncare probabilitatea de a obţine „stema" este p. *Atunci probabilitatea de a obţine „banul" este* (1—p)*. *Rezultă că probabilitatea de a obţine mai întîi „stema" şi apoi „banul", din două aruncări, este produsul acestor numere, sau* p (1—p)**.

În acelaşi fel, probabilitatea de a obţine mai întîi „banul" şi apoi „stema" va fi (1—p) p.

Întrucît înmulţirea obişnuită este comutativă, adică în produsul a două numere nu are importanţă care din numere este considerat înmulţitorul şi care deînmulţitul, aceste două produse sînt egale:

$$p\ (1-p) = (1-p)\ p.$$

Aceasta este explicaţia.

* Dacă *A* şi *B* sînt două evenimente cu proprietatea că la orice încercare trebuie să se producă fie evenimentul *A*, fie evenimentul *B*, fără ca ele să se poată produce simultan, atunci cazurile favorabile pentru *A* sînt evident nefavorabile pentru *B* şi reciproc, cazurile favorabile pentru *B* sînt nefavorabile pentru *A*. De aceea probalilitatea producerii evenimentului *B* este 1—*p*, unde *p* este probabilitatea producerii lui *A*. — *N. R.*

** Fie *A* şi *B*, două evenimente independente, adică avînd proprietatea că probabilitatea de producere a fiecăruia dintre aceste evenimente la o încercare nu depinde de producerea sau neproducerea celuilalt la o încercare anterioară. Să notăm cu *p* probabili-

Scanned with OKEN Scanner

— Asta e desigur un raționament subtil, deși n-am pretenția să-nțeleg mecanismul lui, spuse Sam, am să încerc să-l povestesc prietenilor de ziua mea. Dar ia spune-mi, nu cumva mai știi și alte enigme pe care pot să le pun?

— Da, cunosc una foarte interesantă, răspunse Sam Junior. Dar mai întîi spune-mi cîți invitați ai de ziua ta?

— Hm, vreo treizeci, răspunse Sam.

Minunat, e un număr bun pentru ghicitoarea pe care o cunosc cu ziua de naștere. Dacă ai fi înregistrat data nașterii fiecăruia din membrii clubului, ce șanse mi-ai da ca să găsesc doi oameni ale căror date de naștere coincid? Dar notează: cînd spun data nașterii înțeleg luna și ziua, nu și anul nașterii.

— Ei bine, din treizeci de oameni aleși la întîmplare — spuse Sam — cred că șansa trebuie să fie cam unu la doisprezece, dar nu pun rămășag decît pentru cinci la unu pentru găsirea a două zile de naștere identice.

— Bun, spuse Sam Junior, accept bucuros să-ți pro-

tatea lui A, cu q probabilitatea lui B și fie n numărul cazurilor posibile la fiecare încercare. Atunci la două încercări succesive, numărul total al cazurilor posibile este n^2 (la fiecare caz posibil din prima încercare corespund n cazuri posibile din a doua încercare). Pentru a calcula probabilitatea producerii evenimentului A la prima încercare și a evenimentului B la a doua încercare, observăm că numărul cazurilor favorabile la prima încercare este pn și fiecăruia dintre ele îi corespund qn cazuri favorabile la a doua încercare. Prin urmare, numărul total al cazurilor favorabile la ambele încercări este $pn \cdot qn$, deci probabilitatea căutată va fi $\frac{pn \cdot qn}{n^2} = pq$. — *N. R.*

Scanned with OKEN Scanner

pun s-o încerci. Dacă cineva îţi oferă ceva mai mult decît un pariu la egalitate pentru găsirea unei coincidenţe, tu să primeşti. — Asta nu o mai înţeleg — adaugă Sam.

— *Nu-i decît un alt exemplu de ceea ce numim „natura multiplicativă a probabilităţilor independente“*, spuse în continuare Sam Junior. În cazul acesta, atîta timp cît nu ai dat de o coincidenţă, continui să întrebi ziua de naştere a oamenilor, pînă cînd i-ai cercetat pe toţi cei treizeci, adică pînă la limită. Astfel, deoarece procesul acesta continuă numai dacă n-ai găsit o coincidenţă, probabilităţile care trebuie înmulţite sînt cele de nereuşită la fiecare interogare a unui alt om. Probabilitatea de reuşită este, firește,* 1 *minus probabilitatea de nereuşită.*

Cu alte cuvinte, al doilea om a cărui zi de naştere o cercetezi are $\frac{364}{365}$ *şanse de a nu avea aceeaşi zi de naştere cu primul om. Cînd ajungem la al treilea om, el poate avea aceeaşi zi de naştere cu oricare din primii doi şi, prin urmare, şansa lui de a nu avea aceeaşi zi de naştere cu nici unul din ei este* $\frac{363}{365}$.

Aceasta înseamnă că după ce ai întrebat trei oameni care este ziua lor de naştere, probabilitatea de a nu găsi o coincidenţă în cadrul acestui grup de trei este $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$ *şi, bineînţeles, probabilitatea de a găsi o coincidenţă este de* $1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$. *Vezi, aşadar, că cercetînd întregul grup de treizeci de oameni, probabilitatea de a găsi o coincidenţă este* $1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{336}{365}$.

* Vezi nota 2 de la pag. 32 N. R.

Scanned with OKEN Scanner

Există mai multe căi pentru a evalua acest număr. În orice caz, răspunsul este că probabilitatea de a găsi o coincidență este de aproximativ 0,7 ceea ce înseamnă, desigur, că ai o șansă mai mare decît doi la unu ca să găsești o coincidență.

— E într-adevăr uimitor, spuse Sam. Cîte persoane ar trebui să întreb ca să pot paria la egalitate că există oameni cu aceeași dată de naștere?

— Cam douăzeci și patru. Este interesant că șansele de a găsi o coincidență cresc foarte repede pe măsură ce adaugi zile de naștere dincolo de douăzeci și patru.

CAMPIONATUL DE TENIS

Deocamdată să sfîrșim cu problemele de probabilități, spuse Sam. Materialul pe care mi l-ai dat îmi va fi suficient pentru următoarele cîteva săptămîni. După cîte știu, te pregătești să joci mult tenis vara asta și o să dai cu totul uitării matematica.

— Da, ai dreptate, răspunse Sam Junior, dar uite ciudățenie! mi-a venit în minte o problemă de tenis pe care nu o pot rezolva ușor pe cale matematică.

— Matematică la tenis! — exclamă Sam. Ce vrei să spui?

— Să vezi, răspunse Junior, că nu e vorba chiar de matematică la tenis; urmează să organizez un campionat de tenis pentru juniori și nu pot să calculez cîte cutii de mingi de tenis trebuie să procur pentru campionat. Cînd organizezi un campionat trebuie să-i repartizezi în perechi pe toți concurenții pentru prima etapă; după aceea îi repartizezi în perechi pe învingători pentru a doua etapă și așa mai departe pînă cînd, în sfîrșit, campionatul se termină rămînînd doar învingătorul.

Scanned with OKEN Scanner

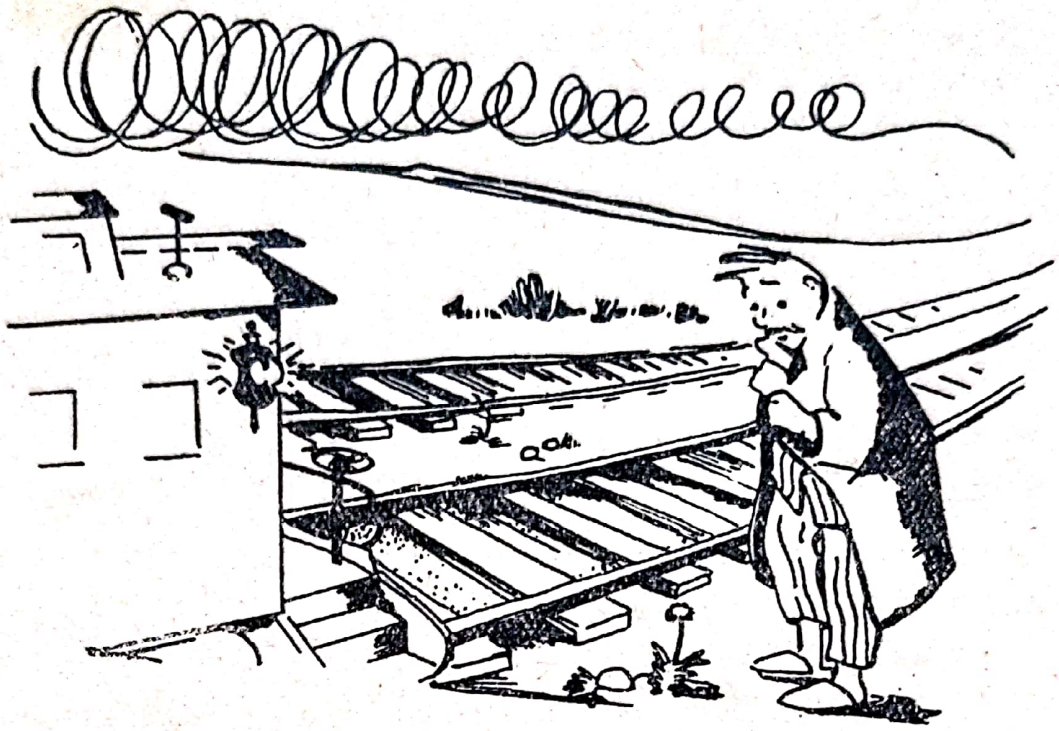
Şi acum iată problema: pentru fiecare meci individual dintre doi jucători trebuie să procur o cutie nouă cu mingi de tenis. Dacă însă într-una din etapele campionatului avem un număr impar de participanţi, unul dintre ei rămîne ca „rezervă" şi nu mai concurează în etapa respectivă, dar va intra în etapa următoare.

Ceea ce îmi încurcă socotelile este posibilitatea de a avea aceşti oameni fără soţ, care rămîn în rezervă la o etapă sau la alta. Pentru un număr dat de participanţi iniţiali la campionat şi admiţînd posibilitatea oamenilor care trec în rezervă, nu mă simt în stare să calculez numărul total de meciuri care se vor juca.

Sam rîse:

— Ei bine, iată o treabă la care pot să te ajut. Nu socoti de loc că ai putea avea un număr impar de oameni la fiecare etapă. Mai mult chiar, în loc să încerci de a analiza numărul de meciuri care se vor juca etapă după etapă şi să admiţi că o serie de oameni vor trece în rezervă, este mult mai simplu să arunci o privire asupra întregului tablou. De fapt, fiecare meci elimină un participant. Astfel, dacă începi cu n *participanţi, întrucît trebuie să termini neapărat cu un singur om, care este cîştigătorul, trebuie să fie eliminaţi din joc* n—1 *participanţi. Aceasta înseamnă că trebuie să fie jucate* n—1 *meciuri pentru a elimina acest număr de oameni. Prin urmare trebuie să pregăteşti* n—1 *cutii cu mingi de tenis.*

Scanned with OKEN Scanner



3

Feroviarul

Scanned with OKEN Scanner

MERSUL TRENURILOR

Într-un orăşel din Vestul mijlociu, trăia un mecanic de teren, pensionar, pe nume William Johnson. Calea ferată principală pe care lucrase timp de atîţia ani trecea prin oraş. Dl. Johnson suferea de insomnie. Se trezea adesea la o oră din noapte şi apoi nu mai putea să adoarmă. În aceste împrejurări simţea nevoia să facă o plimbare de-a lungul străzilor pustii ale oraşului şi ajungea întotdeauna la barieră. Rămînea dus acolo pe gînduri, contemplînd calea ferată pînă ce vreun tren fulgera pe lîngă el, gonind prin beznă. Apariţia trenului îl înveselea întotdeauna pe bătrînul feroviar. După aceea se întorcea acasă, sigur că va adormi.

După cîtva timp făcu o remarcă ciudată: i se părea că majoritatea trenurilor pe care le vedea trecînd la barieră se îndreptau spre est şi numai cîteva spre vest. Ştiind prea bine că pe această linie circula un număr egal de trenuri care se îndreptau spre est şi spre vest şi că ele alternau cu regularitate, îşi închipui la început că se înşelase în socoteli. Vrînd să se asigure de acest lucru, îşi luă un carneţel şi începu să noteze „E"-uri şi „V"-uri, după direcţia spre care se îndrepta primul tren care trecea. La sfîrşitul unei săptămîni avea notate cinci „E"-uri şi numai două „V"-uri, iar observaţiile din săptămîna următoare îi dădură, în linii mari, aceeaşi proporţie. Aceasta, poate fiindcă se trezea întotdeauna la aceeaşi oră din noapte şi cel mai des înainte de trecerea trenurilor care se îndreptau spre est?

Scanned with OKEN Scanner

Pus pe gînduri, hotărî să întreprindă un studiu statistic amănunţit al problemei, făcîndu-şi observaţiile şi în timpul zilei. Ceru unui prieten să întocmească o listă lungă de timpuri alese în mod arbitrar ca, de pildă, 9,35, 12, 15,07 şi aşa mai departe, şi se postă cu punctualitate la barieră la aceste ore, pentru a vedea care din trenuri va trece mai întîi. Dar rezultatul era acelaşi ca mai înainte. Dintr-o sută de trenuri care trecură prin faţa lui, cam şaptezeci şi cinci se îndreptau spre est şi numai douăzeci şi cinci spre vest. Cuprins de desperare, telefonă la depoul din oraşul cel mai apropiat pentru a se informa dacă nu cumva unele trenuri care se îndreptau spre vest au fost îndrumate pe o altă linie, dar primi un răspuns negativ. Fu chiar asigurat că trenurile circulau întocmai după orar şi că zilnic treceau în ambele direcţii un număr egal de trenuri. Ciudăţenia aceasta îl duse la o asemenea desperare, încît nu mai putu să doarmă de loc şi se îmbolnăvi.

Se întîmplă însă ca doctorul din localitate, pe care dl. Johnson îl consultă pentru starea sănătăţii sale, să fie totodată un matematician amator şi un colecţionar de enigme matematice.

— Iată ceva nou pentru mine, spuse el, cînd dl. Johnson îi descrise cauza tulburărilor sale. Dar stai puţin, trebuie să existe un răspuns raţional. După cîteva clipe de gîndire, doctorul avu răspunsul gata.

— *Vezi, spuse el, totul depinde de faptul că trenurile merg după un anumit orar, cu toate că soseai la barieră la momente arbitrare. Să presupunem că trenurile care se îndreaptă spre est traversează oraşul nostru la fiecare oră plină, în timp ce trenurile care se îndreaptă spre vest trec la fiecare oră şi un sfert. Fi-*

Scanned with OKEN Scanner

reşte, există un număr egal de trenuri în fiecare direcţie. Să vedem însă care tren va trece primul, după ce ai ajuns la barieră. Dacă soseşti între ora plină şi ora şi un sfert, să zicem între ora 13 şi 13,15, primul tren va fi cel care se îndreaptă spre vest, adică trenul de ora 13,15. Dacă însă soseşti după ora 13,15 şi ai pierdut acest tren, următorul va trece la ora 14 şi se va îndrepta spre est.

Dacă te duci la barieră la momente întîmplătoare, şansa de a ajunge în primul sfert de oră este de trei ori mai mică decît aceea de a sosi în următoarele trei sferturi de oră. Deci, probabilitatea ca primul tren care trece să se îndrepte spre est este de trei ori mai mare decît aceea ca să se îndrepte spre vest. Şi tocmai acest lucru l-ai observat.

— Dar nu înţeleg. Dacă probabilitatea de a trece un tren spre est este de trei ori mai mare decît aceea a unui tren care merge spre vest, nu rezultă matematic că trebuie să existe mai multe trenuri care merg spre est? obiectă dl. Johnson. Nu ştiu prea multă matematică însă pare să fie o concluzie firească.

— Nu, răspunse doctorul zîmbind, nu înţelegi! Primul tren care trece pare mai curînd să fie unul care se îndreaptă spre est, deoarece şansa sosirii dumitale în perioada cuprinsă între un tren care se îndreaptă spre vest şi unul care se îndreaptă spre est este de trei ori mai mare. În cazul acesta însă vei avea o medie mult mai mare de aşteptare.

— Cum aşa? — exclamă mecanicul surprins. Ce înţelegi printr-o aşteptare mai mare?

— Ei bine, vezi — continuă doctorul cu răbdare — dacă ajungi la barieră în timpul primului sfert de oră, astfel ca primul tren care trece să fie unul ce se îndreaptă spre vest, nu va trebui niciodată să aştepţi

Scanned with OKEN Scanner

trecerea lui mai mult de cincisprezece minute. De fapt, timpul mediu de aşteptare va fi de numai şapte minute şi jumătate. Pe de altă parte, dacă ai scăpat trenul care se îndreaptă spre vest, va trebui să aştepţi aproape patruzeci şi cinci de minute înainte de a trece trenul care se îndreaptă spre est. Astfel, deşi probabilitatea ca primul tren să se îndrepte spre est este de trei ori mai mare decît invers, timpul cît trebuie să-l aştepţi este de asemenea de trei ori mai mare, ceea ce echilibrează totul.

S-ar putea să nu fie exact un sfert faţă de trei sferturi de oră, dar sînt sigur că, de vei verifica orarul, vei găsi că aceasta este situaţia în general. Fiind dat un număr egal de trenuri care alternează într-o direcţie sau alta, aceasta este singura modalitate ca observaţia dumitale să fie valabilă pe o perioadă îndelungată. Între fiecare tren care se îndreaptă spre est şi trenul următor care se îndreaptă spre vest trebuie să existe un interval mai scurt decît este între fiecare tren care se îndreaptă spre vest şi trenul următor care se îndreaptă spre est.

— Trebuie să mă gîndesc la asta, spuse dl. Johnson, scărpinîndu-se în cap. Aşadar dumneata spui că-i din pricina orarului?

— De fapt, putem să privim problema şi altfel, fără să ne referim la orar, spuse doctorul. Să luăm, de pildă, un singur tren — expresul — care trece pe aici făcînd cursa între Chicago şi Los Angeles. Ne aflăm la o distanţă de aproape cinci sute de mile de Chicago şi la o mie cinci sute de mile de Los Angeles. Să presupunem că ajungi la o barieră la un moment oarecare. Unde se află, cel mai probabil, trenul acesta?*

* Această a doua explicaţie se aplică direct problemei cu cabinele de ascensor din introducere. — *N. A.*

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît de aici pînă la Los Angeles linia este de trei ori mai lungă decît pînă la Chicago, există trei şanse la una ca trenul să se afle mai curînd la vest decît la est de dumneata. Şi, dacă se află la vest de dumneata, el se va îndrepta spre est cînd trece prima oară. Dacă circulă mai multe trenuri între Chicago şi California, aşa cum se întîmplă în realitate, situaţia va rămîne, bineînţeles, aceeaşi, iar primul tren care va trece prin oraşul nostru după orice interval de timp e mai probabil că va fi unul ce se îndreaptă spre est.

— Îţi mulţumesc, spuse dl. Johnson, ridicîndu-se şi întinzînd mîna să-şi ia pălăria, cred că m-ai vindecat chiar şi fără pilule.

ÎNCRUCIŞAREA TRENURILOR

După cîteva zile de la vizita sa la doctor, dl. Johnson primi un telefon de la acesta.

— Dacă poţi, vino la cabinetul meu azi după-amiază — spuse doctorul — aş dori să-ţi pun o altă întrebare în legătură cu căile ferate.

— Bucuros, spuse dl. Johnson care, fiind pensionar, avea o mulţime de timp liber.

— Iată o problemă — spuse doctorul cînd dl. Johnson intră — pe care mi-a pus-o unul dintre pacienţii mei cînd i-am povestit despre experienţa dumitale cu trenurile care se îndreaptă spre vest şi spre est. Cînd se duce la lucru, el este nevoit să traverseze singura linie de cale ferată pe care circulă în cea mai mare parte trenuri de marfă, despre care se ştie că sînt lungi şi se mişcă foarte încet cînd trec prin oraş. De cele mai multe ori este nevoit să-şi oprească maşina în faţa semaforului în care licăresc lumini roşii şi să

Scanned with OKEN Scanner

aştepte pînă cînd se scurge încet şirul nesfîrşit al vagoanelor de marfă. El mi-a mărturisit că ar dori să existe o linie dublă, în care caz trenurile care se îndreaptă spre est şi cele care se îndreaptă spre vest s-ar încrucişa uneori în dreptul barierei, scurtînd astfel timpul total de aşteptare. Crezi că dacă lucrurile s-ar întîmpla aşa el ar trebui cu adevărat să aştepte mai puţin?

— Bineînţeles, spuse bătrînul feroviar. Dacă numărul total de trenuri care circulă pe linia dublă este acelaşi cu al trenurilor care folosesc o linie simplă, încrucişarea ocazională a două trenuri care merg în direcţii opuse va reduce timpul mediu de aşteptare. De ce? Dacă două trenuri traversează intersecţia simultan, timpul de aşteptare necesitat de trecerea a două trenuri se reduce la acela necesar pentru trecerea unuia singur.

— E adevărat, dar numai atunci cînd se încrucişează perfect. În alt caz extrem însă, situaţia diferă cu totul: de exemplu, cînd locomotiva unui tren ajunge la bariera străzii tocmai în clipa cînd ultimul vagon al celuilalt tren o părăseşte. Ce se întîmplă atunci?

— Socot că nu-i nici o deosebire faţă de cazul cînd trenurile nu se încrucişează de loc.

— *Da de unde! N-ai cîtuşi de puţin dreptate şi ţi-o pot dovedi printr-o problemă simplă de aritmetică. Să presupunem că în medie trece un tren pe oră în ambele direcţii şi că fiecare tren în trecere blochează intersecţia pentru şase minute. Să calculăm timpul de aşteptare în cazul acesta. Există o şansă la zece ca automobilistul să ajungă la intersecţie în timp ce trece trenul, sau mai curînd cît timp se văd semnalele roşii. Întrucît este la fel de probabil ca el să sosească la inter-*

Scanned with OKEN Scanner

secție cînd trenul tocmai intră sau tocmai pleacă, timpul mijlociu de așteptare pentru ca un tren să treacă este de trei minute. Așadar, timpul mediu de așteptare va fi de 0,3.*

Acum să presupunem că trenurile se încrucișează întotdeauna dar numai puțin — locomotiva unuia încrucișîndu-se cu ultimul vagon al celuilalt. Aceasta echivalează, desigur, cu existența unui număr de două ori mai mic de trenuri care, însă, sînt de două ori mai lungi.

— Nu-i nici o deosebire, comentă mecanicul de tren.

— O, ba da, este! Șansele ca să nimerești semnalele roșii cînd ajungi la intersecție sînt, firește, aceleași. Dacă, însă, ești oprit de semnalele roșii, timpul dumitale mediu de așteptare este dublu. Astfel, trenurile care se încrucișează tocmai la locomotivă, înrăutățesc de două ori situația automobilistului.

— Înțeleg, spuse mecanicul de tren pe gînduri. Într-adevăr, dacă ar rămîne un interval de numai cîteva minute între cele două trenuri, automobiliștii care așteptau să treacă primul tren ar putea să traverseze, pe cînd dacă se încrucișează, această pauză nu mai există.

— Mă bucur că înțelegi problema, spuse doctorul. Ajungem astfel la concluzia că în cazul unei suprapuneri exacte la încrucișare timpul mediu de așteptare e redus la jumătate, pe cînd în cazul suprapunerii locomotivei unui tren cu ultimul vagon al celuilalt tren, timpul de așteptare este dublat.

*Rezultatul de trei minute pentru timpul mijlociu de așteptare al automobilistului a fost obținut în ipoteza că el ajunge la barieră în momentul trecerii unui tren. Deoarece aceasta se întîmplă într-un caz din zece, timpul mediu de așteptare în general este de $3 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}3$ minute. — *N. R.*

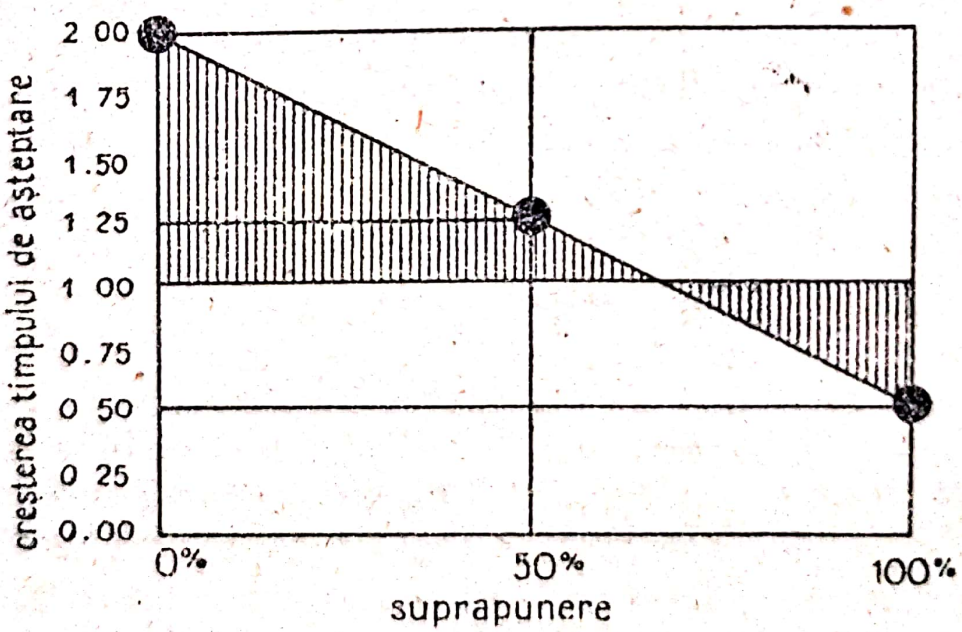
Scanned with OKEN Scanner

— *Să vedem acum — propuse dl. Johnson — ce se întîmplă dacă trenurile se suprapun întîlnindu-se la jumătatea garniturii.*

— *Putem face şi acest calcul. Acest caz va echivala cu existenţa unui număr de două ori mai mic de trenuri, fiecare tren fiind cu cincizeci la sută, adică cu un factor de 1,5 mai lung. În cazul acesta, şansa de a sosi la intersecţie în timp ce trece un tren trebuie să fie înmulţită cu factorul* $\frac{1,5}{2}$ *iar timpul mijlociu de aşteptare în acest caz creşte cu factorul 1,5. Creşterea totală a timpului mediu de aşteptare va fi dată de produsul* $\frac{1,5}{2} \cdot 1,5 = 1,125$. *Aşadar, dacă trenurile se suprapun la jumătate, timpul de aşteptare va creşte cu 12,5%*

— *Chiar şi pentru o încrucişare la jumătatea garniturii este încă nefavorabil — spuse dl. Johnson mirat.*

— *Da, şi acest lucru e semnificativ. Să presupunem că facem un grafic în care notăm rezultatul suprapunerii exacte — la jumătate şi la capete — spuse doctorul luînd un creion.*



Scanned with OKEN Scanner

Din această diagramă reiese că suprafața totală corespunzînd creșterii timpului mediu de așteptare este mult mai mare decît aceea corespunzînd unei descreșteri. Astfel, trebuie să deducem că, în medie, suprapunerea trenurilor în trecere îi va sili pe automobiliști să aștepte mai mult la intersecții, decît în cazul cînd același număr de trenuri circulă în ambele direcții pe o linie simplă.

BONDARUL

— Nu mai știi vreo altă problemă cu trenuri? — întrebă mecanicul de tren după o scurtă tăcere.

— Ba da, mai știu una, dar e foarte simplă. Iat-o: două trenuri pornesc simultan unul în direcția celuilalt, plecînd din două gări *A* și *B*, la o distanță de o sută de mile între ele, și mergînd fiecare cu o viteză de cincizeci de mile pe oră. Un bondar pleacă în același timp din gara *A* spre gara *B* zburînd de-a lungul liniei de cale ferată cu o viteză de șaptezeci de mile pe oră. Cînd întîlnește trenul care înaintează dinspre *B* se sperie, face cale întoarsă și zboară spre *A*. Și tot așa zboară încolo și încoace între cele două trenuri care înaintează pînă cînd, în cele din urmă, acestea se întîlnesc. Cînd vede amîndouă trenurile năpustindu-se din ambele părți, bondarul se sperie atît de rău încît cade mort.

Întrebare: Care este distanța totală parcursă de bondar?

— Ia să vedem, spuse dl. Johnson. Nu pare prea greu. Dacă ambele trenuri înaintează cu cincizeci de mile pe oră pornind din cele două gări situate la o depărtare de o sută de mile una de alta, ele vor trebui

Scanned with OKEN Scanner

să se întîlnească la mijlocul drumului, la o oră după plecare. Cît de repede spui că zbura bondarul?

— Cu şaptezeci de mile pe oră.

— Ei bine, atunci a trebuit să zboare tocmai şaptezeci de mile. Nu-i aşa?

— Bravo, exclamă doctorul. Faptul însă că ai obţinut soluţia atît de uşor dovedeşte că nu eşti un matematician. Un matematician cu adevărat bun ar fi rezolvat-o cu ajutorul unei serii infinite reprezentînd suma intervalelor de timp necesare pentru a acoperi fiecare pendulare în mişcarea oscilatorie a bondarului. Ar obţine mai curînd un plictisitor exerciţiu matematic, deoarece expresiile algebrice pentru aceste intervale de timp sînt cam complicate. Am auzit că o dată, cînd această problemă i-a fost dată doctorului John von Neumann, care a fost unul din cei mai mari matematicieni ai secolului nostru, el a gîndit doar o fracţiune de minut şi a dat răspunsul corect de şaptezeci de mile.*

— Foarte bine! exclamă cel care-i dăduse această problemă. Deci ai găsit soluţia simplistă; credeam că ai să însumezi mintal seria infinită.

— Ba am însumat chiar seria infinită — spuse John von Neumann, despre care se ştia că era capabil să efectueze mintal cele mai complicate calcule cu o iuţeală neîntrecută decît doar de maşinile electronice de calcul, la a căror dezvoltare a adus contribuţii importante.

* Matematician american (1903—1957) cunoscut prin lucrările sale de analiză matematică — el a construit teoria spectrală a operatorilor lineari nelimitaţi în spaţiul hilbert — şi prin lucrări în domeniul logicii matematice şi grupurilor topologice. În ultima perioadă a vieţii s-a ocupat de problemele maşinilor de calculat, teoria grupurilor etc. — *N. R.*

Scanned with OKEN Scanner

Dl. Johnson îi povestea prietenului său, doctorul înzestrat cu aptitudini matematice, despre cîteva din solicitările greu de rezolvat adresate lui pe vremea cînd lucra ca mecanic de tren. De pildă, o dată, serviciul de semnalizare dorea foarte mult să aplice un test asupra porumbeilor călători şi îl întrebase dacă n-ar vrea ca într-una din cursele de trenuri cu orar regulat să dea drumul la doi porumbei călători la o distanţă de exact 50 de mile unul de altul şi la un interval de exact o oră.

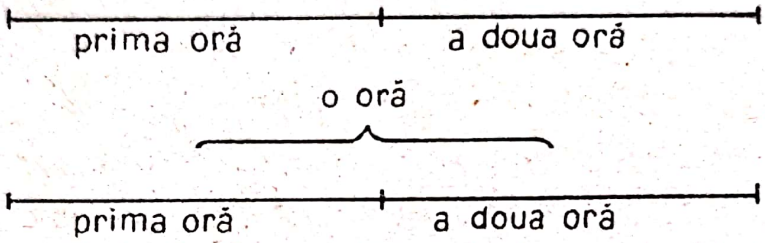
Exista, într-adevăr, o cursă care parcurgea calea ferată în linie dreaptă pe o distanţă de 100 de mile. Orarul era astfel întocmit încît un tren să parcurgă aceste 100 de mile în exact 2 ore, realizînd astfel în aceste 2 ore o viteză medie de 50 de mile pe oră. Pe parcursul acesta de 100 de mile existau însă numeroase opriri şi plecări şi timpul exact scurs la fiecare oprire depindea oarecum de traficul pasagerilor care urcau şi coborau din tren. Mecanicul de tren putea să mărească din cînd în cînd viteza, pentru a recupera timpul pierdut şi reuşea întotdeauna să realizeze parcurgerea celor 100 de mile în cele 2 ore cerute.

— Dar, îi obiectă prietenului său din cadrul serviciului de semnalizare, tocmai pentru că parcurg 100 de mile în 2 ore nu există nici un motiv să presupui că în cadrul acestor două ore trebuie să existe întotdeauna un interval de o oră în care viteza mea medie să fie de 50 de mile pe oră.

— *Din păcate, n-ai dreptate, spuse doctorul rîzînd. Neţinînd seama de variaţiile de viteză în timpul acestor două ore cît parcurge trenul 100 de mile, este uşor de*

demonstrat că trebuie să existe întotdeauna cel puțin un interval de timp de o oră în care parcurgi exact cincizeci de mile. Poate că modul cel mai simplu de a vedea acest lucru este următorul: să considerăm cele două ore împărțite în două intervale adiacente de cîte o oră fiecare.

Acum presupunem mai departe că nu parcurgi exact cincizeci de mile, nici în prima și nici în a doua oră. Altfel problema este gata rezolvată. Putem să presu-



punem, de asemenea, că în decursul primei ore viteza medie este mai mică de cincizeci de mile pe oră, și în cursul ultimei ore viteza medie este mai mare de cincizeci de mile pe oră. Vei vedea că argumentul pe care sînt pe cale de a-l expune este într-adevăr independent de ora în care crește viteza medie mai mare.

— Să considerăm un interval de o oră și să-l mutăm continuu de-a lungul graficului, pornind de la acoperirea completă a primei ore de pe grafic și mișcîndu-l pînă cînd, în cele din urmă, acoperă complet a două oră.

Pentru acest interval de o oră, pe care îl facem să alunece de-a lungul graficului, vom stabili viteza medie atinsă. Întrucît, bineînțeles, acest interval mobil de o oră acoperă la început complet prima oră, viteza medie în intervalul mobil este inițial mai mică decît cincizeci de mile pe oră. Lăsăm apoi intervalul nostru

Scanned with OKEN Scanner

să alunece pînă cînd, în cele din urmă, acoperă în întregime a doua oară de pe grafic. Acum viteza medie pe intervalul mobil a devenit mai mare decît cincizeci de mile pe oră.

Lăsînd deci intervalul de o oră să alunece de-a lungul graficului, deducem că viteza medie în acest interval variază continuu de la mai puțin de cincizeci de mile pe oră, la mai mult de cincizeci de mile pe oră. Urmează, deci, că undeva în procesul de alunecare, viteza medie în acest interval de o oră trebuie să ia exact valoarea de cincizeci de mile pe oră. În felul acesta propoziția este demonstrată.*

Mecanicul de tren oftă şi spuse:

— Bănuiesc că ai dreptate, deşi nu i-ar fi fost de prea mare ajutor serviciului de semnalizare, deoarece nu puteam niciodată şti dinainte cînd va atinge trenul începutul acestei porţiuni, după cum n-aşi fi ştiut cînd să dau drumul porumbeilor. Gîndindu-mă la acest caz,

*Poziția intervalului mobil de o oră în intervalul fix de două ore este unic determinată de poziția începutului acestui interval. Să notăm cu x diferența (măsurată în ore) între momentul începerii intervalului mobil și momentul începerii intervalului fix, iar cu $f(x)$ viteza medie în intervalul mobil. Variabila independentă x parcurge evident toate valorile între 0 și 1. Deoarece viteza medie în intervalul mobil variază continuu în procesul de alunecare, funcția $f(x)$ este continuă. Concluzia de mai sus rezultă acum din următoarea teoremă a analizei: dacă o funcție continuă ia la extremitățile intervalului de variație a variabilei independente valorile a și b, atunci această funcție ia și toate valorile intermediare între a și b. Într-adevăr, în cazul funcției $f(x)$ considerate, valoarea ei pentru $x = 0$ este mai mică decît 50, iar valoarea ei pentru $x = 1$ este mai mare decît 50. Prin urmare, există un număr x_0, cuprins între 0 și 1, astfel încît $f(x_0) = 50$. — *N. R.*

Scanned with OKEN Scanner

mi-am amintit de o problemă foarte practică şi care cred că te-ar interesa.

— Dă-i drumul, spuse doctorul, cu toate că, de obicei, nu mă prea pricep la chestiuni practice.

TRECEREA LA ORARUL DE VARĂ

— După cum ştii, spuse dl. Johnson, lucram pe aceeaşi linie de mai mulţi ani. În fiecare seară ajungeam în oraşul meu la exact aceeaşi oră şi predam trenul unui alt mecanic care îl prelua de acolo.

— Da, ştiu asta, spuse doctorul.

— Întrucît orariile de cale ferată sînt atît de perfecte, soţia mea cunoştea cu precizie ora sosirii mele şi venea la gară să mă ia. În fiecare noapte îşi făcea apariţia tocmai în clipa cînd soseam şi mă lua acasă.

— O soţie care colabora foarte bine cu dumneata, observă doctorul.

— Ei bine, urmă mecanicul, îmi amintesc că într-un an a fost o neînţelegere între mai multe state* în privinţa trecerii la orarul de vară. Cînd a fost introdus orarul, statul în care locuiam nu l-a adoptat. Cum însă traseul pe care trebuia să-l urmez începea într-un stat adiacent, care lucra cu noul orar, mersul trenurilor a fost dezorganizat şi, în prima noapte după schimbarea introdusă am ajuns în gara oraşului meu exact cu o oră mai devreme. M-am gîndit că şi soţia mea va fi la gară exact peste o oră. Totodată mi-am amintit că mecanicul care preluase de la mine trenul îşi stricase ceasul, dîndu-l de nenumărate ori cu o oră înainte şi înapoi, şi că i-l împrumutasem pe al meu.

* Autorul se referă la statele din cadrul S.U.A. — *N. T.*

Scanned with OKEN Scanner

Aveam deci de aşteptat exact o oră, aşa că hotărîi că era mai bine să o pornesc pe jos acasă. Am mers şi am mers şi în sfîrşit am întîlnit-o pe soţia mea care se îndrepta spre gară. Ne-am întors împreună spre casă. Cînd am ajuns, m-am uitat la ceasul din perete şi am constatat că, deşi mersesem atît de mult, am ajuns acasă numai cu douăzeci de minute mai devreme decît de obicei.

Deşi nu avusesem ceasul meu la mine, ştiu că trebuia să fi mers foarte mult timp. Am încercat, de fapt, să calculez cît timp umblasem şi m-am zăpăcit. Poate ai putea să-mi arăţi cum să lămuresc această problemă.

— *Da, sigur că pot, spuse doctorul. Pentru a lămuri această problemă, calea cea mai simplă este să uiţi de dumneata şi să te gîndeşti numai la drumul parcurs de soţia dumitale în noaptea aceea. Dacă procedăm aşa, atunci ştim că soţia dumitale a plecat la ora obişnuită, dar s-a întors acasă cu douăzeci de minute mai devreme ca de obicei. Pentru ca ea să fi putut economisi douăzeci de minute în drumul pe care l-a parcurs spre şi dinspre gară, trebuie să fi cîştigat cîte zece minute la fiecare drum. Cu alte cuvinte, trebuie să te fi întîlnit la un moment care era cu zece minute înainte de timpul la care ea ar fi ajuns la gară dacă şi-ar fi continuat drumul. Dar ea ar fi ajuns cu o oră după ce dumneata ai fi pornit-o pe jos din gară. Aceasta înseamnă că ai mers diferenţa dintre cele zece minute şi o oră, cu alte cuvinte ai umblat cincizeci de minute.*

Scanned with OKEN Scanner

4

Călătoriile sînt instructive

Scanned with OKEN Scanner

TREI CHIPURI MÎNJITE DE FUNINGINE

După cum le este prea bine cunoscut celor ce călătoresc prin Europa, pasagerii din trenurile englezeşti lasă de obicei deschise geamurile compartimentelor pentru a îngădui aerului proaspăt să pătrundă înăuntru. O dată cu acesta, ei primesc adesea şi o porţie bună din fumul împrăştiat de locomotivele care sînt puse în mişcare cu cărbuni.

Este, aşadar, uşor de închipuit cît fum a putut să intre prin fereastra deschisă a unui compartiment de tren, în care călătoreau trei englezi bine crescuţi, care şedeau ţepeni pe locurile lor, preocupaţi fiecare de propriile sale treburi. Şi mai uşor este de imaginat cum arătau chipurile celor trei pasageri mînjite cu pete de funingine, care contrastau într-un chip ridicol cu îmbrăcămintea lor impecabilă şi cu atitudinea lor snobă.

Unul dintre ei, domnişoara Atkinson, îşi ridică privirea de pe paginile cărţii pe care o citea şi, cu toată buna ei creştere, nu se putu stăpîni să nu chicotească în faţa a ceea ce vedea. Cei doi bărbaţi chicoteau şi ei.

Dar — şi acest lucru poate fi caracteristic pentru firea britanicilor — fiecare din cei trei pasageri presupunea că propriul său chip era curat şi că ceilalţi doi chicoteau fiindcă îşi vedeau reciproc chipurile (bunele maniere le interziceau să privească de-a dreptul la ceea ce făcea obiectul interesului lor, astfel că era cu neputinţă să-ţi dai seama cine şi din ce pricină se amuza).

Scanned with OKEN Scanner

Situaţia aceasta dură cîteva minute. Deodată domnişoara Atkinson, care era profesoară, îşi dădu seama că nu numai chipurile celorlalţi doi pasageri trebuie să fi fost mînjite cu funingine, ci chiar şi propriul său chip. Scoase deci o batistă şi-şi şterse obrazul cu grijă, de la o ureche la alta şi apoi de la frunte spre bărbie.

După ce privi batista, trase o concluzie corectă. Dar cum de a ajuns la această concluzie?

Nu era prea greu, pornind de la ipoteza raţională a domnişoarei Atkinson că cei doi tovarăşi de drum ai ei, deşi poate nu tot atît de inteligenţi ca ea, nu erau totuşi cu desăvîrşire proşti.

„Să presupunem, gîndi domnişoara Atkinson, că obrazul meu este curat, aşa cum sper că este, şi că aceşti doi domni chicotesc din pricină că fiecare vede chipul celuilalt mînjit de funingine. Dacă lucrurile stau într-adevăr aşa, persoana din dreapta trebuie să vadă un singur chip mînjit cu funingine, şi anume cel al celuilalt bărbat. În cazul acesta, care va fi raţionamentul lui? Se va întreba, firește, de ce chicoteşte celălalt şi, întrucît vede că obrazul meu este curat, singurul motiv ar fi că şi propriul lui chip este de asemenea mînjit. Concluzia este elementară dar fiindcă nici unul din ei n-a ajuns la ea, presupunerea iniţială că obrazul meu e curat este vădit neîntemeiată. Ar fi deci mai bine să-mi şterg chipul pentru a nu părea ridicolă".

Concluzia logică a domnişoarei Atkinson poate fi generalizată la cazul în care în compartiment se află mai mult decît trei pasageri, toţi avînd chipurile mînjite de funingine. De fapt, cel de-al patrulea pasager, presupus a avea o abilitate logică şi mai mare, ar argumenta în felul următor:

Scanned with OKEN Scanner

„Dacă obrazul meu este curat, ceilalţi trei pasageri cu chipurile mînjite trebuie să rîdă unul de celălalt. Dar măcar unul din ei trebuie să fie destul de inteligent ca să-şi dea seama că dacă obrazul său este curat, ceilalţi doi pasageri trebuie să rîdă unul de celălalt, şi, nefiind cu totul proşti, trebuie să-şi dea seama că propriile lor feţe sînt mînjite".

Şi aşa mai departe, şi aşa mai departe . . .

UN SĂRUT ÎN ÎNTUNERIC

În timpul ocupaţiei Franţei de către nazişti, în compartimentul unui tren care mergea pe ruta Paris-Marsilia, se aflau patru pasageri. Era o societate destul de ciudată: o fată tînără şi drăguţă, o doamnă în vîrstă foarte sobră, un ofiţer al forţelor germane de ocupaţie şi un francez de vîrstă mijlocie, a cărui profesiune n-o puteai defini. Nu se cunoşteau între ei şi nici nu schimbaseră vreun cuvînt. Trenul gonea într-una spre sud. În clipa cînd pătrundea într-un tunel lumina electrică din compartiment se defectă şi timp de cîteva minute cei patru pasageri se pomeniră cufundaţi în beznă.

Deodată se auzi zgomotul unui sărut, urmat numaidecît de cel al unei lovituri puternice aplicate de pumnul cuiva pe obrazul altcuiva. Cînd trenul ieşi din tunel poziţia iniţială a pasagerilor era neschimbată; doar ofiţerul german avea o vînătaie mare sub ochi. Ce gîndea fiecare?

„Aşa-i trebuie", gîndi doamna în vîrstă. „Iată o adevărată fată franceză care va şti să se apere împotriva agresivităţii acestor boşi: Aş dori să avem cît mai multe fete curajoase şi virtuoase ca aceasta".

Scanned with OKEN Scanner

„Dacă obrazul meu este curat, ceilalţi trei pasageri cu chipurile mînjite trebuie să rîdă unul de celălalt. Dar măcar unul din ei trebuie să fie destul de inteligent ca să-şi dea seama că dacă obrazul său este curat, ceilalţi doi pasageri trebuie să rîdă unul de celălalt, şi, nefiind cu totul proşti, trebuie să-şi dea seama că propriile lor feţe sînt mînjite".

Şi aşa mai departe, şi aşa mai departe . . .

UN SĂRUT ÎN ÎNTUNERIC

În timpul ocupaţiei Franţei de către nazişti, în compartimentul unui tren care mergea pe ruta Paris-Marsilia, se aflau patru pasageri. Era o societate destul de ciudată: o fată tînără şi drăguţă, o doamnă în vîrstă foarte sobră, un ofiţer al forţelor germane de ocupaţie şi un francez de vîrstă mijlocie, a cărui profesiune n-o puteai defini. Nu se cunoşteau între ei şi nici nu schimbaseră vreun cuvînt. Trenul gonea într-una spre sud. În clipa cînd pătrundea într-un tunel lumina electrică din compartiment se defectă şi timp de cîteva minute cei patru pasageri se pomeniră cufundaţi în beznă.

Deodată se auzi zgomotul unui sărut, urmat numaidecît de cel al unei lovituri puternice aplicate de pumnul cuiva pe obrazul altcuiva. Cînd trenul ieşi din tunel poziţia iniţială a pasagerilor era neschimbată; doar ofiţerul german avea o vînătaie mare sub ochi. Ce gîndea fiecare?

„Aşa-i trebuie", gîndi doamna în vîrstă. „Iată o adevărată fată franceză care va şti să se apere împotriva agresivităţii acestor boşi: Aş dori să avem cît mai multe fete curajoase şi virtuoase ca aceasta".

Scanned with OKEN Scanner

„Ce impostor acest ofiţer german, gîndi tînăra franţuzoaică dar şi compatrioata mea a ştiut să riposteze cum se cuvine! Nici nu-ţi vine să crezi!“

Ofiţerul german, care-şi acoperea ochiul lovit cu mîna, nu se putea dumiri nici el cum se petrecuseră lucrurile. Explicaţia cea mai bună, pe care şi-o putea da pentru ceea ce se întîmplase, era aceea că francezul încercase s-o sărute pe fată şi că aceasta, lovind în întuneric, îl nimerise din întîmplare pe el în obraz.

De fapt problema este să aflăm ce gîndea francezul şi ce se întîmplase de fapt.

Deşi unii cititori ar putea protesta, obiectînd că problema aceasta nu poate fi calificată drept o enigmă matematică, soluţia ei este totuşi unică. Francezul, care era membrul unui grup ilegal din rezistenţă, era foarte mîndru de isprava sa. Era sigur că, „deşteptul cu pricina“ adică cel cu vînătaia de sub ochi, nu-şi va închipui niciodată că el, francezul, îşi sărutase propriul său pumn şi apoi îl repezise în obrazul nazistului.

PIINE RAŢIONATĂ*

După ce Germania a pierdut războiul şi apoi s-a împărţit în două, situaţia economică în Germania occidentală s-a agravat într-atît încît toate alimentele au fost raţionate, iar articolul cel mai important, pîinea, a fost redus la două sute de grame de persoană

* Această întîmplare a fost comunicată autorilor de dr. Karl Gaede, care spunea că s-a petrecut la Hamburg după cel de-al doilea război mondial. *N. A.*

Scanned with OKEN Scanner

pe zi. Cu acest prilej s-au dat instrucţiuni fiecărui brutar să-şi procure forme speciale în care să coacă pîiniţe de exact această mărime, raţia zilnică fiind o pîiniţă pentru fiecare client din cartierul său.

Dr. Karl Z., un bătrîn profesor de fizică, se oprea în fiecare dimineaţă la brutărie în drumul său spre universitate, pentru a-şi primi raţia. Într-o zi îi spuse brutarului din cartierul său:

— Eşti un om rău, fiindcă-i înşeli pe clienţii dumitale. Formele pe care le foloseşti sînt cu cinci la sută mai mici decît ar trebui să fie pentru a coace pîiniţe de 200 de grame, iar făina pe care o economiseşti o vinzi la negru.

— Dar, domnule profesor, exclamă brutarul, nimeni nu poate să coacă pîiniţe de exact aceeaşi mărime; unele vor fi cu cîteva procente mai mici decît e prevăzut, iar altele cu cîteva procente mai mari.

— Întocmai, răspunse profesorul Z. Am cîntărit pîiniţele pe care mi le-ai dat în ultimele cîteva luni,

Scanned with OKEN Scanner

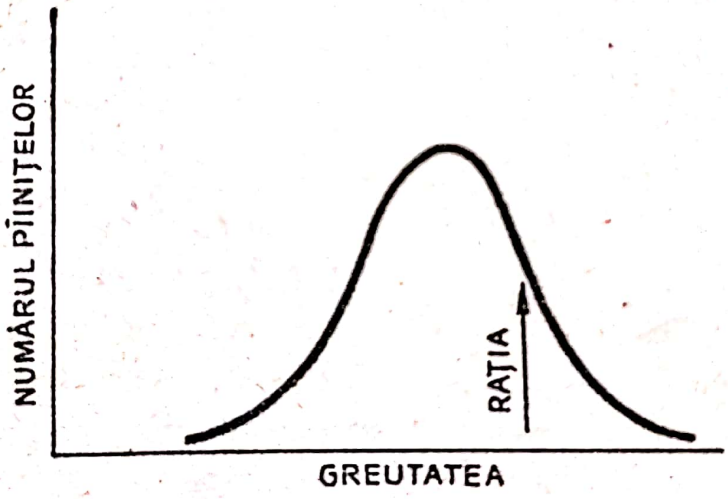
pe un cîntar de precizie care se găseşte întîmplător în laboratorul meu. El arată o variaţie naturală. Dar ce să mai vorbim. Iată aici un grafic al numărului pîiniţelor dumitale de greutăţi diferite comparat cu numărul pîiniţelor cu greutatea corectă.

Vezi? În timp ce unele pîiniţe cîntăresc doar 185 de grame şi altele pînă la 205 grame, greutatea obţinută la o medie a cîntăririlor este 195, în loc de 200 de grame. Trebuie să-ţi procuri forme noi de mărime corectă, altfel te voi reclama autorităţilor.

— Am s-o fac negreşit chiar mîine, domnule profesor, spuse brutarul înspăimîntat, şi puteţi fi sigur că greşeala aceasta nu se va mai repeta.

După cîteva luni, într-o zi profesorul Z. îi spuse brutarului:

— Te-am reclamat astăzi autorităţilor, spuse el. Nu ţi-ai schimbat formele şi continui să-ţi înşeli clienţii.



— Dar, domnule profesor, exclamă brutarul, acum nu mă mai puteţi învinui de înşelăciune. Aţi găsit oare în ultimele luni vreo pîiniţă, din cele pe care vi le-am dat, să cîntărească mai puţin decît este raţia?

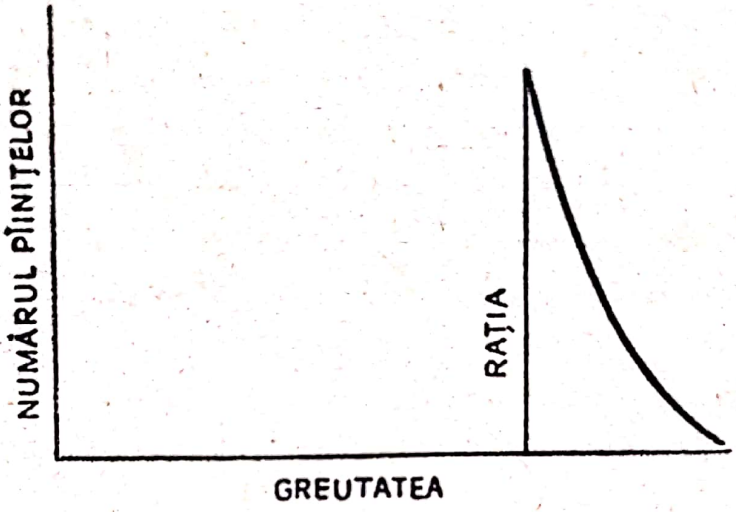
— Nu, toate cîntăreau 200 de grame sau mai mult. Dar aceasta nu se datoreşte faptului că ţi-ai procurat

Scanned with OKEN Scanner

forme de copt reglementare, ci fiindcă alegeai în mod special pîinile mai mari pentru mine, iar pe cele care cîntăreau mai puţin le dădeai altor clienţi.

— Nu puteţi s-o dovediţi! spuse sfidător brutarul.

— *Ba da, pot, declară profesorul Z. Priveşte la distribuţia statistică pe care am obţinut-o cîntărind pîi-*

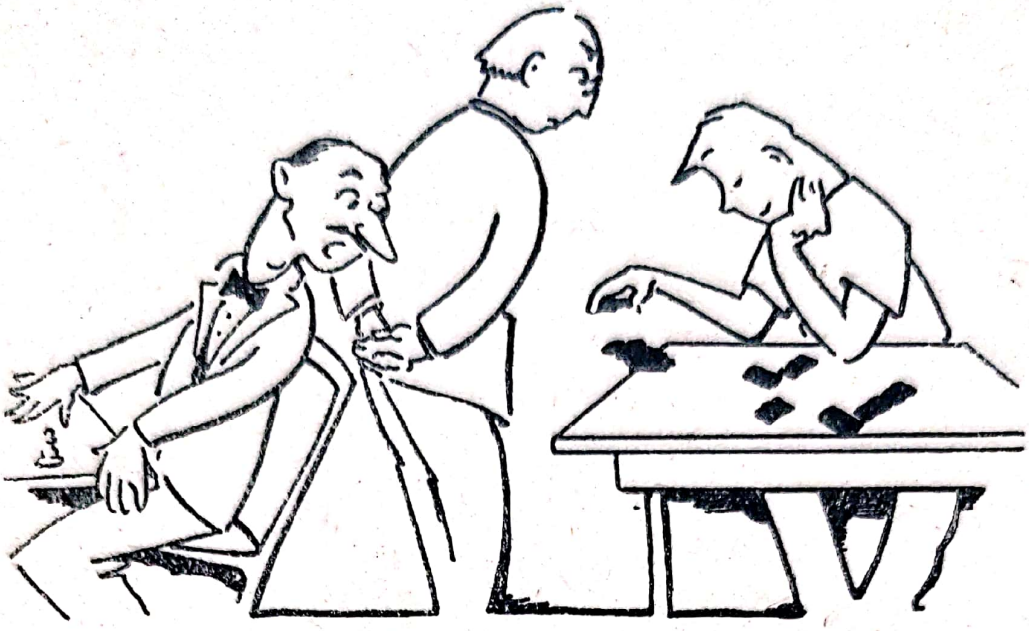


nea pe care am primit-o de la dumneata în ultimele cîteva luni.

În locul distribuţiei normale a erorilor demonstrată de marele matematician german Karl Friederich Gauss, avem aici o curbă întreruptă brusc în partea stîngă şi coborînd încet spre dreapta. Devierile statistice de la medie nu pot conduce la o asemenea distribuţie şi este clar că aceasta a fost produsă artificial prin alegerea unor pîini care cîntăresc 200 de grame sau mai mult. Aceasta este tocmai coada distribuţiei lui Gauss pe care am obţinut-o cîntărind pîinile mai înainte de a sta de vorbă cu dumneata prima oară. Sînt sigur că autorităţile care se ocupă cu raţionarea alimentelor mă vor crede pe cuvînt.

Şi întorcîndu-i spatele, profesorul Z. părăsi brutăria.

Scanned with OKEN Scanner



5

Tînărul Nicholas

Scanned with OKEN Scanner

JOCUL DE DOMINO

Tînărul Nicholas dorea foarte mult să devină membrul clubului de jucători de şah din oraşul său. Din păcate însă, era considerat mult prea tînăr, iar membrii clubului socoteau că e cu neputinţă ca la vîrsta lui să aibă o imaginaţie atît de bogată, o capacitate generală de a combina figuri de joc, precum şi celelalte calităţi ale unui bun jucător de şah.

În ciuda faptului că tînărul Nicholas era un foarte bun jucător, ei rămîneau la părerea lor preconcepută. Într-o seară tînărul Nicholas se afla, ca de obicei, la club, privindu-i pe maeştri jucînd. Şi ca să se sature să mai ceară să joace o partidă, fu sfătuit, în bătaie de joc, să-şi caute nişte piese de domino şi să înveţe acest joc de copii.

— Dar, replică tînărul Nicholas, nu văd cum acest exerciţiu mă va pregăti pentru jocul de şah.

— Totuşi du-te şi încearcă cîtva timp cu dominoul, poate că o să-ţi ajute.

Peste cîteva zile tînărul Nicholas îi comunică unuia dintre membrii vîrstnici ai clubului că în timp ce juca domino, după cum fusese sfătuit, găsise o problemă interesantă care stabilea o legătură între domino şi jocul de şah.

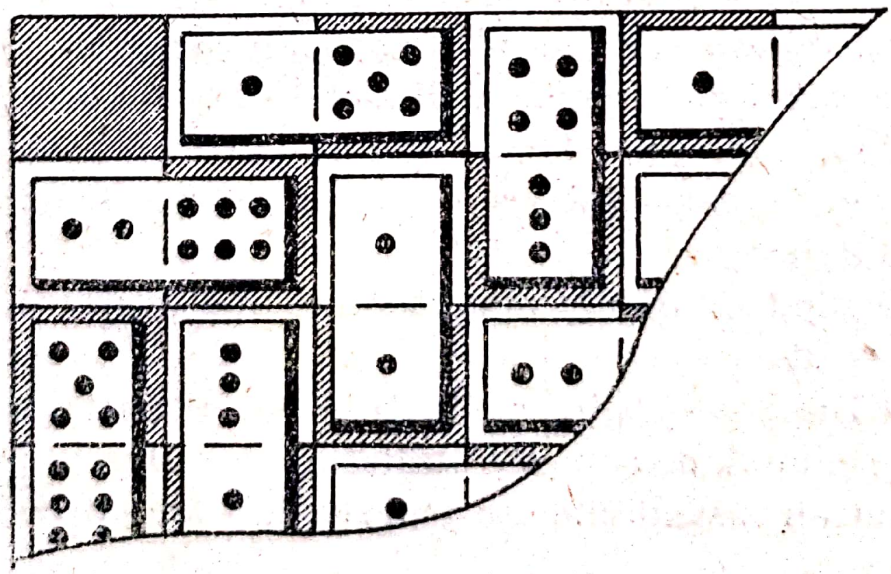
Zîmbind cu indulgenţă, vîrstnicii din grup primiră să-l asculte.

— După cum ştim cu toţii, începu Nicholas sigur de sine, tabla de şah este alcătuită din şaizeci şi patru de pătrate, avînd cîte opt pătrate de-a lungul fiecărei

laturi. Dacă încercăm să acoperim tabla de şah cu piese de domino, care au fiecare forma unui dreptunghi cu lungimea de două pătrate şi lăţimea de un pătrat, avem nevoie de treizeci şi două de piese de domino pentru a acoperi întreaga tablă de şah. Să presupunem însă că avem numai treizeci şi una de piese de domino. Indiferent cum aşezăm piesele pe tablă, trebuie să rămînă neacoperite două pătrate. Să presupunem acum că începem să aşezăm piesele pe tablă în aşa fel încît pătratul din colţul superior din stînga să rămînă neacoperit şi continuăm să aşezăm piesele una lîngă alta pînă cînd vor fi plasate toate cele treizeci şi una de piese. Vom vedea că mai trebuie să rămînă neacoperit încă un pătrat pe tabla de şah. Problema care se pune este să aşezăm piesele de domino astfel încît pătratul neacoperit să fie cel din colţul inferior din dreapta.

Bănuiesc că aceasta este una din problemele de înţelegere profundă şi totală a unei situaţii, în care dumneavoastră, domnilor, sînteţi de neîntrecut.

Vîrstnicii se uitară unul la altul şi fură de părere că era într-adevăr un exerciţiu interesant. Porniră



Scanned with OKEN Scanner

deci să rezolve problema. Luară treizeci şi una de piese de domino şi încercară cu multă sîrguinţă să le aşeze în fel şi chip, în căutarea unui aranjament care să lase liber colţul inferior din dreapta.

Dar după cîteva zile îi comunicară tînărului Nick că era cu neputinţă să lase neacoperit pătratul acela şi considerau deci că problema este astfel rezolvată.

— Dar, întrebă Nicholas, de unde ştiţi că nu este cu putinţă?

— Păi, exclamă unul dintre vîrstnici, am încercat toate felurile de aranjamente posibile şi nici unul dintre ele nu dă rezultatul dorit: aşadar trebuie să fie cu neputinţă.

— Într-adevăr şi eu cred că aşa se pune problema, numai că nu aţi explicat de ce este imposibil.

— De ce? Fiindcă nu putem, spuseră ei.

— Mă întreb, totuşi, dacă răspunsul la întrebare n-ar putea fi formulat într-o formă mai satisfăcătoare.

— Ce înţelegi printr-o formă mai satisfăcătoare? întrebară ei.

— *Iată, urmă tînărul Nicholas, eu aşi privi lucrurile astfel: întrucît această tablă de şah are un număr egal de patrate negre şi albe şi, deoarece fiecare piesă de domino acoperă un pătrat negru şi unul alb, cele două pătrate rămase neacoperite trebuie să fie de culori diferite. Dar pătratele opuse în diagonală sînt de aceeaşi culoare, astfel că nu există vreun mod posibil ca să le laşi pe amîndouă descoperite. Este un caz interesant al unei probleme, în care introducerea unei condiţii ce pare la prima vedere neînsemnată, simplifică soluţia. De fapt, pentru formularea problemei nu este necesar decît un grilaj alcătuit din opt pătrate*

Scanned with OKEN Scanner

pe opt fără nici o culoare. Dar, pentru a rezolva problema, trebuie să împărţim pătratele în două grupuri, care pot la fel de bine fi numite pătrate negre şi albe. Şi aceasta face soluţia imediată şi uşoară!

SĂ CONSTRUIM DIN CUBURI

Unul dintre vîrstnici a fost atît de impresionat de raţionamentul lui Nicholas, încît propuse să i se îngăduie să joace şah. Un altul însă nu vru să admită nici în ruptul capului insistînd ca Nicholas să se ocupe mai departe de jocurile pentru copii şi propunînd chiar cu dispreţ ca Nicholas să se joace cu cuburi din acelea cu care copiii construiesc case. Drept răspuns, vîrstnicul cel binevoitor spuse:

— Asta îmi aminteşte de o problemă în care piesele de domino sînt folosite în locul cuburilor şi care ar putea să vă intereseze şi pe dumneavoastră.

— Nu cred că are rost să ne pierdem vremea construind case din piese de domino, răspunse unul dintre ei cu dispreţ.

— Ce-ar fi, totuşi, să asculţi problema? Poate că o să-ţi placă? insistă primul.

— Să presupunem un caz în care putem folosi oricîte piese de domino dorim. Problema este de a le aşeza unele peste altele pentru a ridica o coloană în aşa fel încît fiecare piesă de domino să acopere cît mai puţin din suprafaţa piesei de dedesubt. Sînteţi liberi să mutaţi fiecare piesă de domino la un capăt, cît de puţin sau cît de mult doriţi, dar coloana obţinută să fie îndeajuns de stabilă ca să nu se răstoarne.

Cîţiva din cei de faţă începură numaidecît să presupună distanţa care se putea lăsa dacă se construia în felul acesta. Soluţiile variau de la lungimea unei

Scanned with OKEN Scanner

jumătăţi de piesă de domino şi pînă la lungimea unei piese întregi.

— N-aţi prea nimerit-o, spuse zîmbind susţinătorul lui Nicholas.

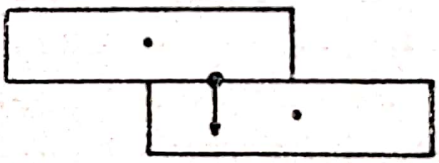
— Ei bine, cît de mare poate fi decalajul între piese? îl întrebară nerăbdători ceilalţi.

— Deşi pare destul de ciudat, răspunse el, el poate fi oricît de mare doriţi.

— Nu credem, spuseră ei într-un glas. Dovedeşte-o.

— Ce crezi Nicholas? îl întrebă prietenul său.

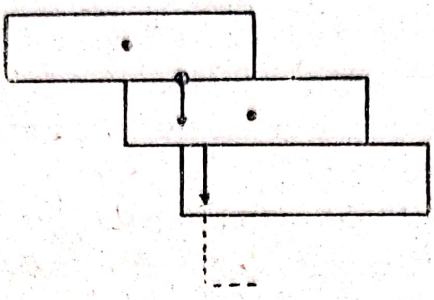
— *E foarte simplu, spuse tînărul Nicholas. Puteţi analiza stabilitatea coloanei finale pornind din vîrf şi mergînd în jos. Decalajul maxim, între piesa de domino din vîrf şi cea imediat de dedesubt, este, desigur, jumătate din lungimea unei piese de domino, astfel încît centrul de greutate al piesei din vîrf să cadă exact pe marginea piesei de sub ea.*



Astfel, avem un decalaj de numai o jumătate din lungimea unei piese de domino. Să vedem acum unde va fi centrul de greutate al celor două piese de domino din vîrf. Dacă încercăm să sprijinim cele două piese de domino pe o a treia, ca în desen, găsim că centrul de greutate combinat este situat la distanţa de o pătrime din lungimea unei piese de domino, de la capătul acoperit al piesei din mijloc. Astfel, am putea aşeza cele două piese de domino din vîrf peste cea aflată dedesubtul lor cu acest decalaj adiţional de o pătrime.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă am calcula acum centrul de greutate al celor trei piese de domino din vîrf, l-am găsi situat la o șesime din lungimea unei piese de domino de la ca-



pătul celei de-a treia piese. Dacă continuăm acest proces, constatăm că decalajul total ce poate fi creat este următorul:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots,$$

pînă la infinit.

— Este oare aceasta corect din punct de vedere matematic? îl întrebă unul dintre vîrstnici pe cel care pusese problema și care, din întîmplare, era matematician.

— Desigur, răspunse acesta. Formula poate fi rescrisă astfel:

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+-+\cdots\right]$$

Această expresie pusă între paranteze este cunoscută sub numele de serie armonică și este divergentă, adică poate fi făcută mai mare decît orice număr dat dinainte. Mijlocul cel mai ușor de a vedea aceasta este de a grupa termenii pentru a arăta că fiecare grup poate fi făcut mai mare decît $\frac{1}{2}$.

Grupăm seria după cum urmează:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

Se vede acum că fiecare grup este mai mare decît $\frac{1}{2}$; *adică* $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ *este mai mare decît* $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\left(\text{adică } \frac{1}{2}\right)$;

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2};$$

şi aşa mai departe.

Vedeţi, aşadar, că dacă specificaţi ce decalaj vreţi să obţineţi, se poate calcula cîte piese de domino vor fi necesare pentru a-l stabili potrivit schemei propuse de tînărul Nicholas. Calculul meu porneşte de la vîrf spre bază, dar construcţia va porni, firește, de la bază în sus.

SFORI IN DIAGONALĂ

Incîntaţi de problemele cu tabla de şah şi cu construirea din piese de domino a unei coloane cu decalaje, membrii clubului jucătorilor de şah se uitau unul la altul dornici să mai asculte cîte ceva de acelaşi gen. Încurajat, tînărul Nicholas cutează să spună:

— Mai ştiu una care cred că v-ar putea interesa.

— Atunci ce mai aşteptaţi? dă-i drumul, spuseră ei pe deplin cîştigaţi.

— Să presupunem că în fiecare din cei patru pereţi ai acestei camere este bătut cîte un cui şi că, în plus, mai sînt bătute unul în tavan şi altul în podea. Unim aceste cuie prin sfori în aşa fel încît fiecare cui să fie unit cu fiecare din celelalte cuie printr-o altă sfoară, folosind pentru aceasta două culori: roşu şi albastru.

Scanned with OKEN Scanner

Fiecare legătură între două cuie este fie o sfoară roşie, fie una albastră.

Toate aceste sfori alcătuiesc mai multe triunghiuri, cu alte cuvinte, fiecare trei cuie pot fi considerate drept vîrfurile unui triunghi format din sforile care le leagă. Problema mea este de a vedea dacă pot distribui culorile în aşa fel încît nici un triunghi să nu aibă toate trei laturile de aceeaşi culoare.

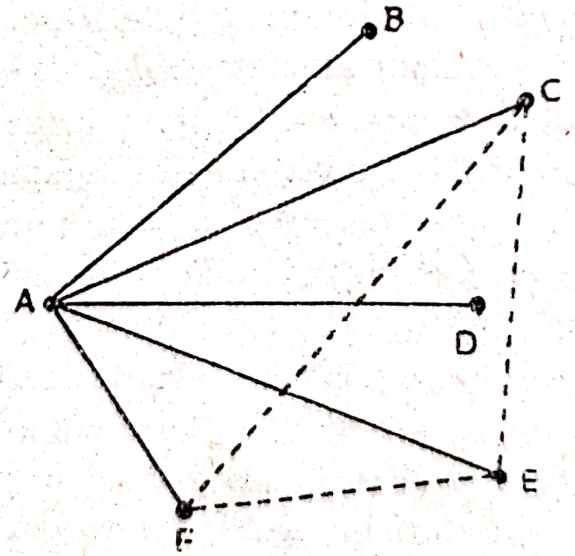
— E destul de greu, murmură matematicianul, rămas pe gînduri. Cred că sînt necesare calcule cu permutări şi combinări, şi altele asemănătoare. Nu ştiam, Nick, că ştii atîta algebră.

— Nu ştiu, răspunse tînărul, dar pot să rezolv problema.

— Ei bine, spune-ne cum, zise matematicianul.

— Foarte simplu, adăugă tînărul Nicholas. Trebuie numai să ştii de unde s-o începi.

Răspunsul este că va exista cel puţin un triunghi avînd toate cele trei laturi de aceeaşi culoare. Voi dovedi că este cu neputinţă să se evite acest lucru.



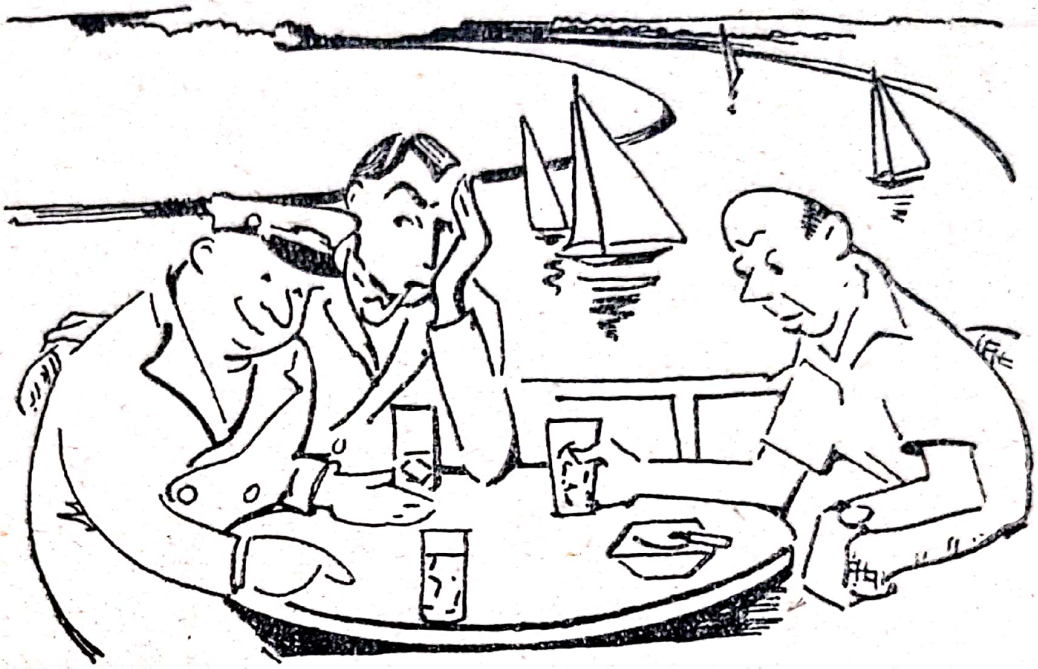
Să considerăm un cui oarecare. De la el, trebuie să pornească cinci sfori, una către fiecare din celelalte

cinci cuie. Indiferent cum distribui culorile între aceste cinci sfori, cel puţin trei dintre ele trebuie să fie de acelaşi fel, deoarece dispuneţi de numai două culori. Pentru a fixa mai bine ideea, să presupunem că trei dintre sfori sînt roşii.

Să considerăm acum triunghiul format din cele trei cuie la care se termină cele trei sfori roşii.

Dacă încercăm să evităm un triunghi cu toate trei laturile de aceeaşi culoare, rezultă că cele trei cuie nu pot fi unite între ele numai cu acea culoare. Sau, mai simplu, triunghiul format de cele trei cuie terminale nu trebuie să fie complet albastru. Cel puţin una din sforile dintre cele trei cuie terminale trebuie să fie roşie. Dar, în cazul acesta, am completat un triunghi roşu pornind de la cuiul iniţial.

Scanned with OKEN Scanner



6

Clubul nautic

Scanned with OKEN Scanner

NAVIGAȚIE FĂRĂ VÎNT

Într-o după-amiază călduroasă şi liniştită de vară, fără nici un pic de adiere, un grup de membri ai Clubului Nautic Fluvial şedeau pe terasa clubului sorbindu-şi ginul cu sifon.

— Nu se prea poate face navigaţie fără vînt, spuse unul dintre ei, filozofînd.

— Ba, uneori se poate, adăugă altul. De pildă, eu am navigat o dată pe o distanţă destul de lungă fără nici un pic de vînt.

— Fără nici un pic de vînt?

— Da.

— Şi folosind velele?

— Da, folosind velele.

— Ai suflat cumva în ele, sau ce-ai făcut? întrebă neîncrezător primul.

— Nu, le-am folosit ca de obicei. Dar mai bine să-ţi explic cum s-au petrecut lucrurile. Mă aflam într-o mică barcă cu pînze în mijlocul rîului, cînd vîntul încetă brusc să mai sufle. Nu aveam vîsle şi nici alte mijloace de a înainta, iar barca mea era dusă de curent pe rîu în jos. Deodată zării la vreo sută de yarzi*, în sensul apei, o mică luntre cu vîslele atîrnîndu-i de ambele părţi, în care nu se afla nimeni. Dacă aş fi putut să pun mîna pe ea, mi-aş fi remorcat barca cu pînze şi aş fi dus-o încotro voiam. Dar cum

* Măsură de lungime din sistemul englez egală cu 91,44 cm. — *N. R.*

să parcurg cei o sută de yarzi? Nu era nici urmă de vînt, şi ambele ambarcaţii pluteau cu aceeaşi viteză în direcţia curentului; deci distanţa dintre ele rămînea constantă.

— Şi atunci ce-ai făcut?

— Încearcă să ghiceşti.

— Ei bine, nu cred că e cu putinţă să înaintezi în direcţia contrară curentului dacă nu e vînt.

— *Şi cu toate acestea se poate. Cînd am spus că nu sufla nici un pic de vînt am înţeles că în raport cu pămîntul aerul era imobil. Cum însă barca mea cu pînze înainta în direcţia curentului o dată cu rîul, se producea o uşoară adiere care sufla în direcţia contrară curentului apei. Era aceeaşi situaţie ca şi cum m-aşi fi aflat pe un lac şi un vînt uşor ar fi suflat în direcţia luntrei, care era imobilă. Aşadar, tot ceea ce aveam de făcut era să plutesc împotriva acestui vînt pînă cînd ajungeam luntrea.*

BARCA ŞI STICLA

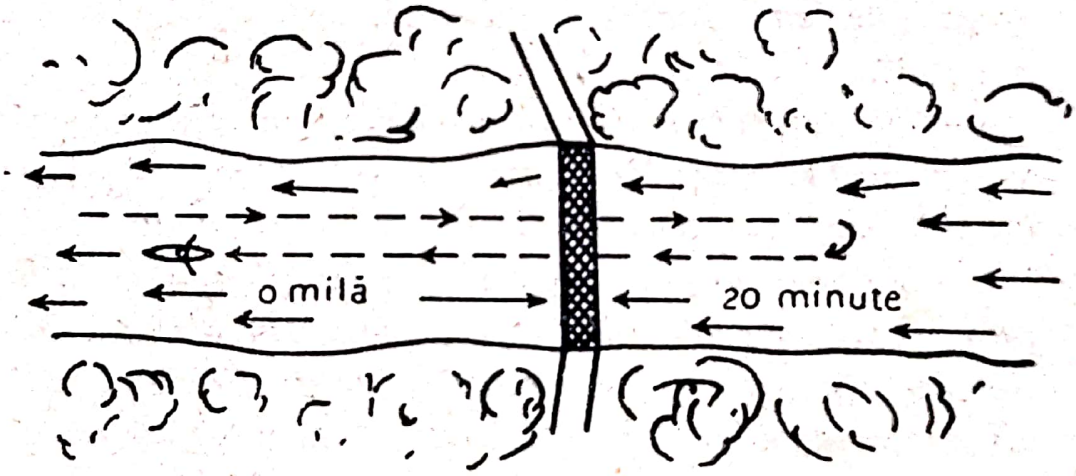
— Răspunsul la problema cu luntrea îmi aminteşte de teoria relativităţii a lui Einstein, remarcă unul dintre sportivii Clubului Nautic.

— Mişcare relativă, da, însă nu teoria relativităţii, spuse altul care citise cărţi de popularizare despre acest subiect. Aceasta îmi aminteşte însă de o altă povestire, în care trebuie să ţii seama de felul în care îţi alegi sistemul de coordonate pentru descrierea fenomenelor.

Un om vîslea într-o barcă, pe un rîu, împotriva curentului. La prova bărcii se afla o sticlă umplută pe jumătate cu un vin excelent. În timp ce trecu pe

Scanned with OKEN Scanner

sub un pod, barca se balansă uşor şi sticla căzu în apă. Fără să observe întîmplarea, omul continuă să vîslească împotriva curentului, în timp ce sticla fu dusă, firește, în direcţia curentului. După douăzeci de minute, omul observă că-i dispăruse sticla. Întoarse barca (puteţi face abstracţie de timpul necesar acestei manevre) şi porni în direcţia curentului pentru a găsi sticla. Fiind un tip calm, el continua să vîslească cu acelaşi efort, astfel încît, pe cînd viteza sa faţă de maluri fusese mai înainte diferenţa dintre viteza bărcii şi cea a rîului, acum ea era suma aceloraşi cantităţi. În cele din urmă zări sticla şi o culese la o depărtare de o milă* în josul podului. Îmi puteţi spune, pe baza acestor date, care era viteza rîului?



Cîţiva membri ai clubului, care erau matematicieni amatori, încercară să rezolve problema şi unul dintre ei scrise chiar o ecuaţie algebrică, ce conţinea cele două cantităţi necunoscute: viteza bărcii faţă de apă şi viteza rîului. Dar nici calculul direct, nici folosirea algebrei nu păreau să dea o soluţie. În cele din urmă ajunseră la concluzia că nu dispuneau de date suficiente.

* 1 milă = 1,609 km. — *N. R.*

Scanned with OKEN Scanner

— Şi cu toate acestea, există o soluţie, de fapt foarte simplă, spuse cel care pusese problema. Tot ceea ce aveţi de făcut este să consideraţi problema din punctul de vedere al unui sistem de coordonate care se mişcă o dată cu rîul. Din acest punct de vedere rîul devine un lac, în timp ce malurile şi podul se mişcă în raport cu el. Dacă laşi să cadă un obiect în apă în timp ce vîsleşti pe un lac, şi te întorci peste douăzeci de minute ca să-l găseşti, îţi mai trebuie alte douăzeci de minute pentru a te întoarce la loc. Astfel, sticla a stat în apă timp de patruzeci de minute şi, în acest interval, podul s-a mişcat în raport cu apa cale de o milă. Prin urmare, viteza podului în raport cu apa, sau, ceea ce este acelaşi lucru, viteza apei în raport cu podul şi cu malurile, a fost de o milă în patruzeci de minute, sau o milă şi jumătate pe oră. E simplu, nu-i aşa?

— Dar nu poţi stabili viteza bărcii în felul acesta, spuse acela care încercase să folosească algebra. Există două necunoscute în această problemă.

— Da, însă viteza bărcii în raport cu apa nu este importantă în problemă şi nu ţi-am cerut s-o afli. Dificultatea pe care ai întîmpinat-o vrînd să rezolvi problema pe cale algebrică a rezultat din faptul că ai încercat să găseşti două necunoscute avînd o singură ecuaţie. De fapt, cea de-a doua necunoscută dispare, dar ecuaţia pare atît de complicată încît nu ai observat acest lucru.

GIN ŞI SIFON

Iată o altă problemă pentru voi, spuse unul dintre membrii clubului sorbindu-şi ginul şi sifonul. Să presupunem că aveţi două pahare umplute la acelaşi ni-

Scanned with OKEN Scanner

vel, unul cu gin, iar altul cu sifon. Să scoatem acum o lingură de gin din primul pahar şi s-o turnăm în cel de-al doilea. Amestecăm bine şi apoi luăm o lingură din amestecul din al doilea pahar şi o turnăm înapoi în primul. Întrebare: în urma acestor două operaţii va fi mai mult gin în paharul cu sifon sau mai mult sifon în paharul cu gin?

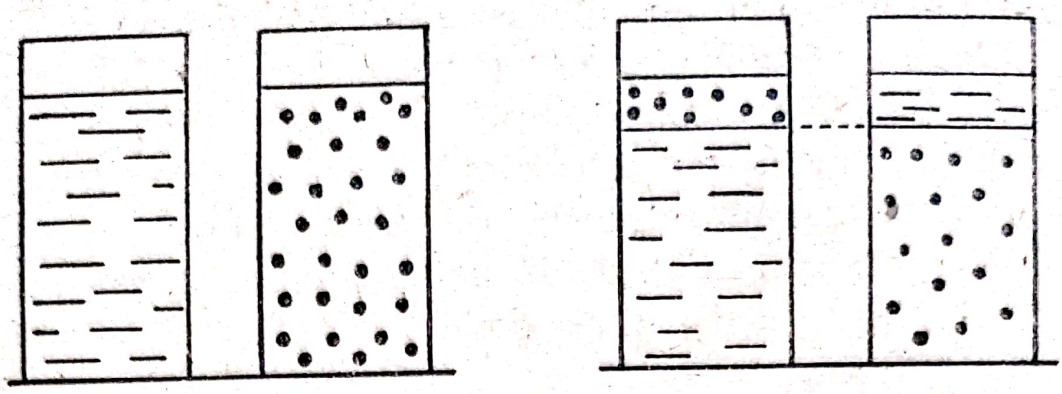
— Fireşte că va fi mai mult gin în paharul al doilea, spuse un altul, deoarece ai turnat în el o lingură cu gin şi ai luat înapoi o lingură conţinînd o cantitate anumită de sifon împreună cu o altă cantitate de gin.

— Văd că eşti foarte sigur de aceasta, dar tot atît de greşit. Încearcă să raţionezi în felul următor: ai turnat o lingură de lichid din primul pahar în cel de-al doilea, şi apoi ai turnat o lingură înapoi în primul. Întrucît paharele au fost iniţial la fel de pline, după aceste două operaţii vor fi din nou la fel de pline. Deci, ginul care lipseşte din primul pahar este înlocuit cu sifonul luat din al doilea pahar şi este prezent în al doilea pahar înlocuind sifonul luat din el. Cantităţile sînt evident egale.

— Totuşi, nu-mi dau seama de ce.

— Foarte simplu. Să încercăm cu numere. Să presupunem că paharele conţineau iniţial cîte trei uncii fiecare şi că dumneata foloseşti o lingură de o uncie. Iei o treime sau o uncie de gin şi o adaugi paharului cu sifon, care conţine acum patru uncii de lichid. Ai aici trei sferturi sifon şi un sfert gin. Dacă le amesteci bine şi iei o uncie, lingura va conţine şi ea trei sferturi sifon şi un sfert gin. Cînd o torni în paharul cu gin, echilibrul este restabilit, dar acum ai 2 $\frac{1}{4}$ uncii de gin

Scanned with OKEN Scanner



înainte de amestec

după amestec

și $\frac{3}{4}$ *uncii de sifon. În paharul cu sifon au rămas* $\frac{3}{4}$ *uncii de gin care înlocuiesc sifonul adăugat în celălalt pahar. Înțelegi?*

Dacă lucrurile s-ar fi petrecut cum ai gîndit dumneata și ai fi obținut mai mult gin în paharul al doilea decît sifon în primul, ar fi crescut cantitatea totală de gin și ar fi scăzut cea de sifon. Un minunat sistem de a turna apă în vin!

ȘLEPUL IN ECLUZĂ

— Revenind la problemele de navigație, interveni un alt membru al clubului, vă voi spune una deosebit de interesantă. Am spus-o în nenumărate rînduri unor diferiți fizicieni, dar nici unul dintre ei nu a dat răspunsul corect. Un șlep încărcat cu fier vechi plutea în ecluza unui canal. Dintr-o cauză necunoscută, oamenii de pe șlep începură să arunce fierul vechi peste bord pînă cînd șlepul se goli de tot. Întrebarea este: ce s-a întîmplat cu nivelul apei din ecluză?

— Bineînțeles că nu s-a schimbat, spuse unul dintre membrii clubului.

— Dimpotrivă, cred că nivelul apei a crescut, adăugă altul.

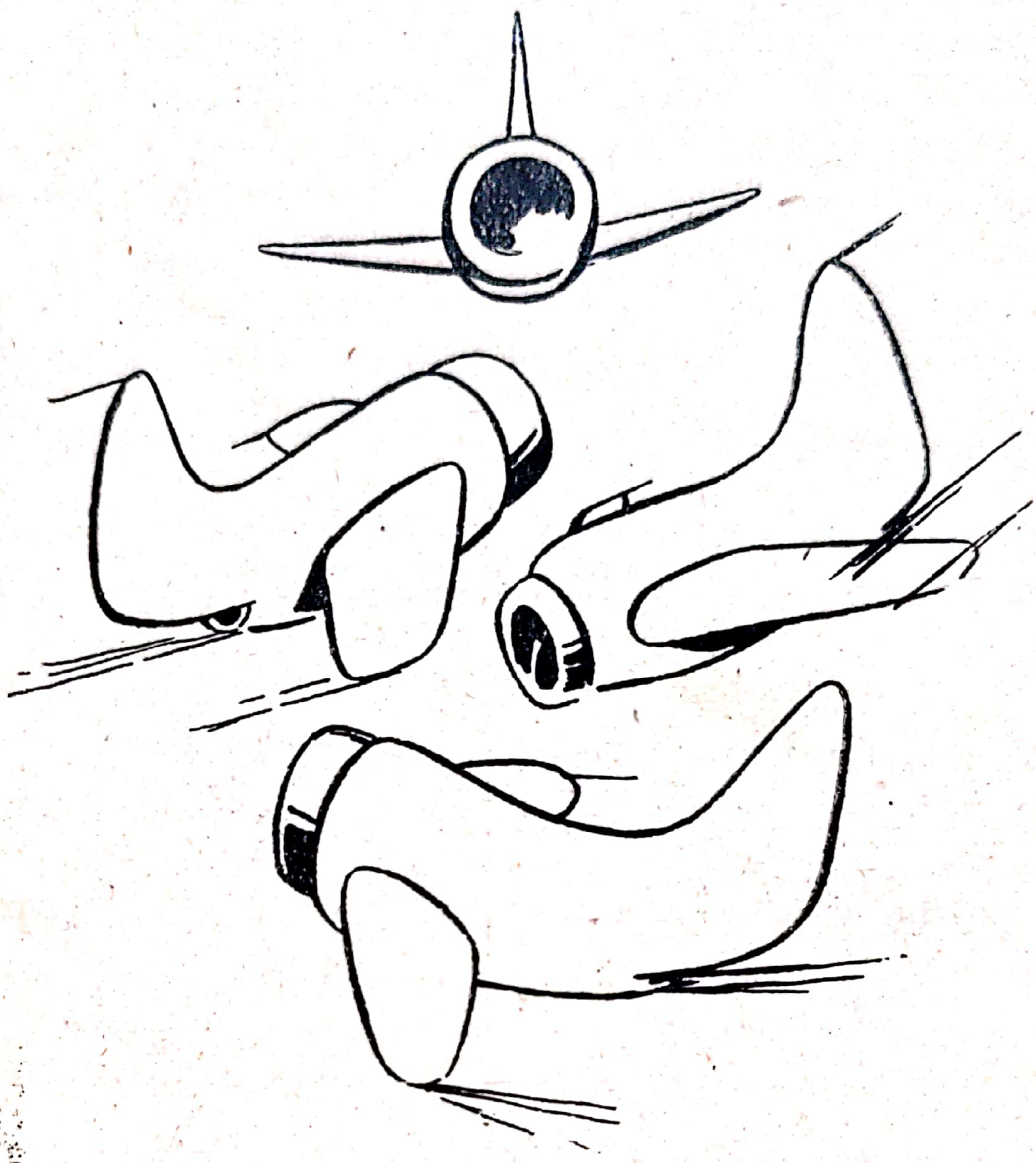
Scanned with OKEN Scanner

— Acestea sînt şi răspunsurile pe care le-am primit de la fizicieni. De fapt, însă, amîndouă sînt greşite. Nivelul apei din ecluză a scăzut. Conform principiului lui Arhimede, orice obiect care pluteşte dizlocuieşte un volum de apă egal cu greutatea lui. Deci, întrucît fierul este mult mai greu decît apa, volumul apei dizlocuit de barca încărcată cu fier este mult mai mare decît volumul fierului. Dacă însă este scufundat în apă la fundul ecluzei, fierul dizlocuieşte numai cantitatea de apă egală cu volumul său. În consecinţă, nivelul apei din ecluză trebuie să coboare cînd fierul este aruncat peste bord.

— Nu-mi este prea clar, spuse unul dintre cei ce ascultau.

— Bine, atunci raţionează în felul următor. Astronomii ne spun că unele stele, ca, de pildă, satelitul lui Sirius, sînt alcătuite dintr-o materie de un milion de ori mai densă decît apa. Un ţol cub din această materie ar cîntări cîteva tone. Dacă un asemenea ţol cub greu este aşezat în şlep, acesta se va lăsa adînc în apă iar nivelul apei se va ridica. Dacă, însă, acest ţol cub rămîne la fund, el va dizloca numai un ţol cub de apă, adică, în mod practic nimic, şi nivelul apei va coborî. În cazul fierului, rezultatul va fi acelaşi, dar mai puţin neobişnuit.

Scanned with OKEN Scanner



7

Aeronautica

Scanned with OKEN Scanner

ÎMPOTRIVA VÎNTULUI

Un grup de piloţi stăteau la restaurantul unui aerodrom, sorbind cafea, cufundaţi în citirea paginii de humor a unui ziar.

— Ascultă, Jack, spuse unul dintre ei, nu intenţionaseşi oare să zbori pînă la baza *N* astăzi după-amiază şi să te înapoiezi la cină?

— Mi-am schimbat planurile, spuse Jack. Baza se află spre est şi acum suflă un vînt puternic tocmai din această direcţie, ceea ce mi-ar încetini zborul. Mai bine aştept pînă mîine cînd se prevede timp liniştit.

— Dar dacă intenţionezi să te întorci în aceeaşi după-amiază, vîntul n-ar provoca nici o diferenţă în timpul tău de zbor, spuse primul. Nu este probabil ca vîntul să se schimbe înainte de apusul soarelui şi la înapoiere îţi va bate din spate. Aceasta înseamnă că vei recupera timpul pe care l-ai pierdut la ducere.

— Oare aşa să stea lucrurile? întrebă Jack, tărăgănind cuvintele.

— Cu siguranţă. Cum ar putea fi altfel?

— Nu ai prea multă experienţă de zbor, spuse Jack, şi apoi nici n-ai studiat teoria relativităţii.

— Ce are a face aceasta cu teoria relativităţii?

— Ei bine, are fiindcă este tocmai baza unei experienţe pe care Michelson a făcut-o încercînd să descopere ipotetica „mişcare a eterului“ produsă de mişcarea pămîntului în spaţiu . . .

Scanned with OKEN Scanner

Dar să rezolvăm mai întîi problema zborului meu spre baza N. *Dacă cunoştinţele tale matematice au ruginit, am să încerc mai întîi să-ţi explic în limbaj mai simplu. Aminteşte-ţi numai că din cauza vitezei reduse, datorită mersului împotriva vîntului, vei avea nevoie de un timp mai îndelungat ca să ajungi la destinaţie, iar la întoarcere vîntul din spate îţi va accelera zborul şi vei avea nevoie de mai puţin timp ca să te înapoiezi. Aceasta înseamnă că efectul de frînare al vîntului acţionează un timp mai îndelungat asupra ta decît efectul de accelerare, la înapoiere. Pierderea este astfel mai mare decît cîştigul. E simplu, nu?*

Dar fireşte, dacă eşti tare la matematică, nu vei fi convins pînă nu vei vedea aceasta prezentată într-o formulă. Să numim viteza avionului meu — mă refer la viteza faţă de aer — cu V, *iar viteza vîntului cu* v. *Dacă distanţa pînă la baza* N *este* L, *atunci timpul de zbor împotriva vîntului va fi evident* $\frac{L}{(V-v)}$ *şi timpul de zbor în direcţia vîntului va fi* $\frac{L}{(V+v)}$. *Timpul călătoriei dus şi întors este deci:*

$$\frac{L}{V-v}+\frac{L}{V+v}=\frac{2LV}{(V^2-v^2)}=\frac{2L}{V}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{v^2}{V^2}\right)}.$$

Întrucît $\frac{2L}{V}$ *ar fi timpul total de zbor fără nici un fel de vînt, rezultă că într-o zi cu vînt timpul de zbor va fi întotdeauna mai lung. Dacă, de exemplu, viteza vîntului ar fi jumătate din aceea a avionului* $\left(\frac{v}{V}=\frac{1}{2}\right)$ *timpul de zbor ar fi înmulţit cu factorul* $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{3}$. *Dacă viteza vîntului ar fi numai cu puţin mai*

Scanned with OKEN Scanner

mică decît aceea a avionului, ar fi nevoie de zile întregi pentru a parcurge o distanţă atît de mică împotriva vîntului, şi dacă V este egal cu v timpul de zbor ar deveni infinit. Toate acestea ţi le spun de dragul problemei pentru că, de fapt, mi s-a telefonat că persoana pe care doresc s-o văd acolo va sosi abia mîine.

— Foarte bine, dacă nu pleci, vorbeşte-mi despre experienţa lui Michelson.

— Bine, iat-o. Pentru a explica modul în care lumina străbate spaţiul, unii oameni de ştiinţă au presupus că există ceva, denumit de ei eter, care umple întregul spaţiu din univers. Michelson a dedus că dacă acest eter există, ar trebui să fim în stare să descoperim vîntul produs de eter datorită mişcării pămîntului în spaţiu. Pămîntul se roteşte în jurul soarelui cu o viteză de aproximativ şase mile pe secundă, astfel că ar trebui să-l observăm aproape în acelaşi fel în care simţim pe obraz vîntul produs de aer atunci cînd zburăm într-o carlingă deschisă.

În experienţa sa, Michelson a trimis două raze de lumină, una în direcţia ipoteticului vînt de eter şi una în direcţia perpendiculară pe ea. La capetele traiectoriilor lor, ambele raze de lumină au fost reflectate înapoi la sursă, iar momentele sosirii lor au fost comparate. Era de aşteptat ca raza care fusese îndreptată întîi în direcţia şi apoi împotriva vîntului de eter să aibă o întîrziere, la fel ca şi avionul meu, dacă aş fi zburat spre baza *N* astăzi, în timp ce raza îndreptată în direcţia perpendiculară trebuia să întîrzie cu o altă cantitate de timp. Comparînd timpurile de sosire a celor două raze, Michelson spera să descopere mişcarea pămîntului prin eter.

— Şi a descoperit-o?

Scanned with OKEN Scanner

— Nu. Ambele raze s-au întors simultan la punctul de plecare, fără nici un fel de întîrziere. Aceasta i-a pus cîtva timp în încurcătură pe fizicieni, pînă cînd Einstein a explicat rezultatul negativ revoluționînd vechile idei despre spațiu și timp în renumita sa teorie a relativității. Dar nu mi-aș fi închipuit niciodată că zborul meu la baza *N* mă va conduce la Einstein. Este ciudat cum poate să te încurce problema aceasta a zborului în direcția și împotriva vîntului. La prima impresie ți se pare că efectul vîntului se anulează.

PROIECTILELE CĂLĂTOARE

— Dacă te pricepi atît de bine la astfel de probleme, spuse primul ofițer, pot să-ți dau una foarte grea pe care am auzit-o de curînd de la un prieten. Avem patru proiectile dispuse inițial în vîrfurile unui pătrat cu dimensiunile de douăzeci pe douăzeci de mile. Fiecare proiectil ține asupra altuia, după cum poți vedea în desenul acesta. El făcu repede o schiță. Viteza proiectilelor este, să spunem, de o milă pe secundă. Ca rezultat al acestui aranjament, fiecare dintre cele patru proiectile va coti treptat spre dreapta, avînd mereu înaintea sa proiectilul țintă și, în cele din urmă, ele se vor ciocni în mijlocul pătratului. Problema este de a afla după cît timp se vor ciocni proiectilele.

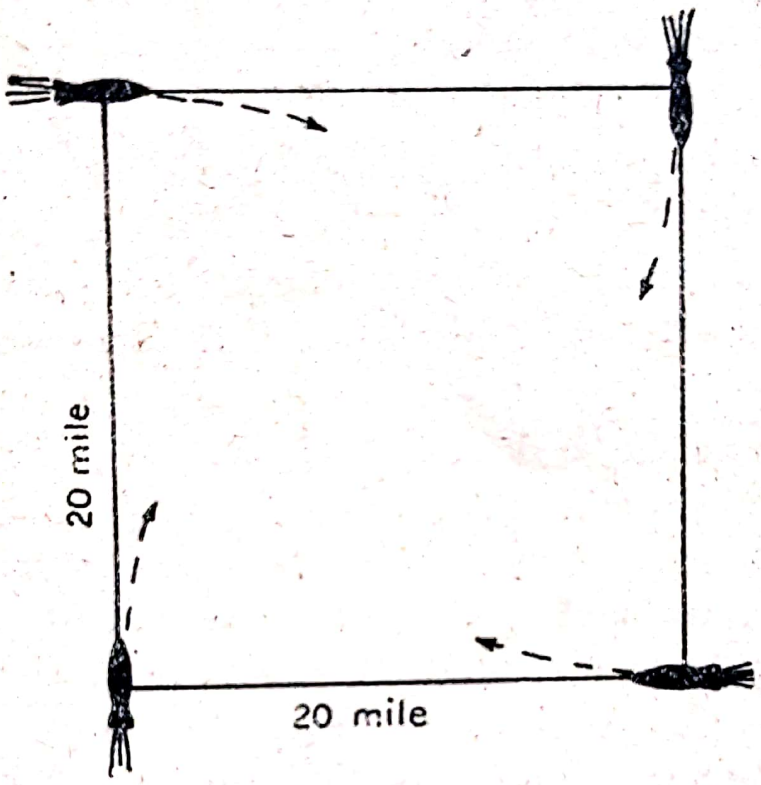
— Este o problemă matematică destul de complicată, spuse Jack, rămînînd pe gînduri. Cred că ar trebui tratată într-un sistem de coordonate polare cu originea în centrul pătratului, și sînt sigur că pot scrie ecuația diferențială a traiectoriei. Dar, firește, că n-o pot face așa dintr-o dată.

— Întocmai. E de presupus că oricine cunoaște matematica superioară poate să rezolve problema

Scanned with OKEN Scanner

aceasta, dar priceperea constă în a găsi o dată care să o facă înţeleasă de oricine.

— Nu cred să fie cu putinţă în cazul de faţă. Traiectoriile proiectilelor sînt probabil nişte curbe geometrice destul de complicate.



— Da de unde! tocmai în asta constă priceperea. Nu ai nevoie să cunoşti traiectoriile. Trebuie să ţii seama numai că, în tot timpul zborului, cele patru proiectile sînt dispuse în vîrfurile unui pătrat care se micşorează şi se roteşte în sensul acelor unui ceasornic. Uită de mişcarea de rotaţie şi gîndeşte-te numai la procesul micşorării. Întrucît proiectilele ţintesc unul asupra altuia, viteza fiecăruia este dirijată întotdeauna de-a lungul unei laturi a pătratului în curs de micşorare înspre proiectilul dispus în vîrful următor. Astfel, viteza cu care se micşorează laturile pătratului este egală cu viteza proiectilelor, adică o milă pe secundă.

Scanned with OKEN Scanner

Şi cum proiectilele se aflau iniţial la o distanţă de douăzeci de mile unul de altul, le va trebui douăzeci de secunde ca să se ciocnească.

— Foarte, foarte interesant, spuse Jack. Trebuie s-o încercăm o dată cînd o să pilotăm patru avioane. Va fi foarte interesant.

APROVIZIONAREA CU CARBURANŢI

— Ei bine, iată o altă problemă care poate să vă intereseze, băieţi, spuse alt pilot. Să presupunem că trebuie să parcurgi un drum spre un punct îndepărtat al globului, pe o distanţă mult mai mare decît raza de acţiune a avionului pe care te pregăteşti să-l foloseşti. Astfel, trebuie să uzezi de tehnica reaprovizionării cu carburanţi în aer. Dacă se porneşte cu mai multe avioane de acelaşi fel, care se reaprovizionează unul pe altul şi se retrag treptat din zbor pînă cînd unicul avion va ajunge la destinaţie, cum veţi planifica programul de reaprovizionare cu carburanţi şi de cîte avioane veţi avea nevoie pentru a executa operaţia?

Pentru simplificare, vom presupune că consumul de carburanţi al avionului poate fi măsurat în mile pe galon* şi că este independent de încărcătură.

— Ei, spune-ne, interveni unul dintre piloţi. Sîntem toţi prea obosiţi pentru a mai putea rezolva aceste probleme.

* Măsură pentru lichide, echivalentă în Anglia cu 4,546 l şi în S.U.A cu 3,785 l. — *N. R.*

Scanned with OKEN Scanner

— *Foarte bine. Să presupunem că inițial dispuneți de* n *avioane identice, inclusiv cel care trebuie să ajungă la destinație, și că rezervoarele de benzină ale tuturor avioanelor sînt umplute la plecare. În timpul zborului există un moment cînd cantitatea de benzină rămasă în oricare din cele* n *avioane este tocmai suficientă pentru a reaproviziona complet cu carburanți toate celelalte* (n—1) *avioane. Astfel, de exemplu, dacă inițial sînt zece avioane transportînd fiecare cîte zece mii de galoni de benzină, ele zboară pînă cînd fiecare rămîne cu cîte nouă mii de galoni. În acest punct, întreaga rezervă de benzină a unuia dintre avioane este folosită pentru a reaproviziona cu carburanți avioanele celelalte; avionul golit rămîne în urmă, iar celelalte nouă își continuă zborul cu cantitatea de benzină completă. Operația următoare se execută atunci cînd cantitatea de carburanți a fiecărui avion a fost redusă cu o noime. Și de data asta unul dintre avioane aterizează, iar celelalte opt își continuă zborul complet reaprovizionate. Următoarele reaprovizionări au loc atunci cînd o optime, o șeptime etc. din cantitatea de carburanți a fost consumată, pînă ce rămîne un singur avion care ajunge la destinație folosind ultima picătură de gazolină din rezervoarele sale.*

Dacă notăm raza de acțiune a avioanelor cu R *și numărul avioanelor cu* n, *găsim că distanța totală care poate fi parcursă este:*

$$D = \frac{R}{n} + \frac{R}{n-1} + \frac{R}{n-2} + \cdots + \frac{R}{3} + \frac{R}{2} + R =$$

$$= R\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, de pildă, dacă n *este egal cu 10, suma pusă între paranteze este egală cu 2,929, ceea ce înseamnă că folosind această metodă de reaprovizionare cu carburanţi, se poate atinge ţinta la o distanţă de aproape trei ori mai mare decît raza de acţiune a unui singur avion*.*

* Cititorul va observa că această problemă se reduce la aceeaşi serie matematică din problema cu piesele de domino aşezate unele peste altele (pag. 71).

Scanned with OKEN Scanner

EPILOG

Cartea era terminată. Trei persoane, Gamow, Stern şi un alt amator de enigme, Theodor von Kármán, şedeau la Woods Hole, consumînd o sticlă de vin. Se puse problema dacă vinul era împărţit în mod egal.

— Presupunînd că toţi trei sîntem egoişti, cum am putea împărţi oare vinul în aşa fel încît fiecare dintre noi să fie convins că primeşte măcar atît cît celălalt? întrebă Gamow. Ştim cu toţii cum se rezolvă o asemenea problemă atunci cînd este vorba de doi copii care se ceartă pentru un obiect oarecare. Unul dintre ei îl împarte aşa cum îşi închipuie el că ar fi două părţi egale, astfel încît să poată fi mulţumit cu oricare dintre ele. Apoi îl lasă pe celălalt să aleagă porţia pe care o doreşte. Ar putea acest exemplu să fie extins în cazul a trei persoane?

Von Kármán zîmbi şi se întoarse spre Stern.

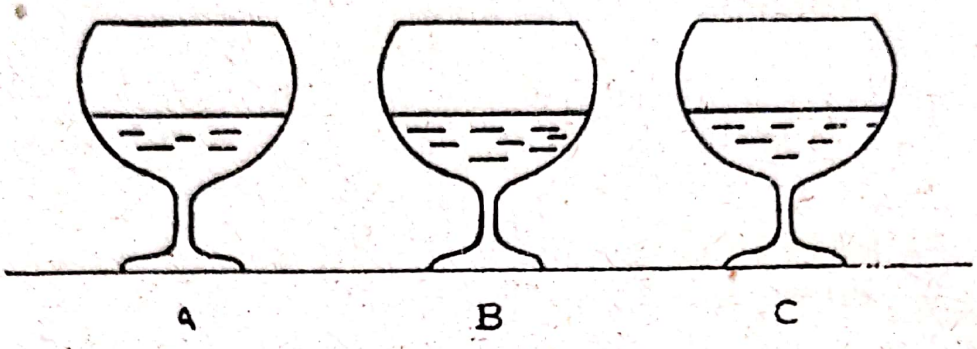
— Hai acum s-o luăm de la capăt, şi după aceea sînt sigur că vei fi în stare să rezolvi problema. Să considerăm enunţul ei modificat în sensul că fiecare dintre noi trebuie să fie convins că a căpătat cel puţin partea care i se cuvine din cantitatea totală (cel puţin o treime). Acum o vei putea rezolva.

— *Cred că ştiu cum să procedez, spuse Stern. Von Kármán împărţi vinul, după socoteala sa, în trei părţi egale, astfel încît să fie mulţumit cu oricare din ele.*

— *Dacă Gamow crede că paharul* A *conţine cel mai mult vin, iar eu cred că paharul* B *conţine cel*

Scanned with OKEN Scanner

mai mult, atunci problema este rezolvată. Gamow capătă paharul A, *eu capăt paharul* B *şi von Kármán paharul* C. *Se poate ivi o problemă numai dacă atît Gamow, cît şi eu considerăm că* A *conţine cel*



mai mult vin. Chiar în acest caz, dacă amîndoi sîntem de acord că B *conţine al doilea volum ca mărime, problema este considerabil redusă. Gamow şi cu mine n-avem decît să împărţim* A *şi* B *între noi în acelaşi mod în care au procedat cei doi copii, iar lui von Kármán îi lăsăm* C.

Singura dificultate reală apare atunci cînd Gamow şi cu mine sîntem de părere că A *conţine cel mai mult vin, Gamow consideră că* B *este al doilea ca mărime şi eu consider că* C *este al doilea ca mărime. În acest caz, din nou îl las pe Gamow să împartă* A *şi* B *în ceea ce consideră că sînt porţii egale. Făcînd aceasta, el va turna din* A *în* B.

Dacă după această operaţie îmi menţin părerea că A *conţine cel mai mult vin şi mi-l iau, atunci Gamow trebuie să ia* B, *deoarece iniţial a socotit că* C *conţine cel mai puţin, şi deci cu mult mai puţin decît o treime din total. Firește că von Kármán îl va prefera pe* B *deoarece, după ce a făcut împărţirea în ceea ce considera că sînt porţii egale, lui* B *i s-a mai adăugat vin. Dar cum problema prevedea că fiecare din noi trebuie să fie convins doar că primeşte cel puţin partea ce i*

se cuvine, von Kármán trebuie să fie mulţumit chiar în cazul în care Gamow alege B.

Dacă, după operaţia executată de Gamow, care a turnat din A *în* B, *eu mă hotărăsc pentru* B, *atunci, în virtutea aceluiaşi argument, Gamow va fi mulţumit cu* A *şi von Kármán va fi de asemenea mulţumit cu* C.

Dacă, după această operaţie, eu mă hotărăsc să iau C, *atunci von Kármán are voie să ia* B *şi Gamow se va mulţumi cu* A.

Von Kármán zîmbi în timp ce ascultă soluţia şi apoi remarcă:

— Acum înţelegi, de ce am schimbat condiţiile problemei, de la un caz în care fiecare dintre noi trebuia să fie convins că primea cel puţin la fel cu oricare altul, în cazul în care fiecare dintre noi trebuia numai să se mulţumească cu faptul că primea cel puţin partea ce i se cuvine? Una din etapele soluţiei dumitale arată că problema, aşa cum fusese enunţată iniţial, nu poate fi rezolvată.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prolog: Cum a luat naștere cartea de față 5

1. *Marele Sultan* 9
   - Doisprezece într-unul 11
   - O problemă de familie 13
   - Data execuției 16
   - A doua încercare a lui Abdul 20
   - O cursă de cai neobișnuită 22

2. *Probabilități . . . probabilități* 25
   - Cartoane colorate 27
   - Alte probabilități 30
   - Ziua de naștere 33
   - Campionatul de tenis 35

3. *Feroviarul* 37
   - Mersul trenurilor 39
   - Încrucișarea trenurilor 43
   - Bondarul 47
   - Porumbeii călători 49
   - Trecerea la orarul de vară 52

4. *Călătoriile sînt instructive* 55
   - Trei chipuri mînjite de funingine 57
   - Un sărut în întuneric 59
   - Pîine rațională 60

5. *Tînărul Nicholas* 65
   - Jocul de domino 67
   - Să construim din cuburi 70
   - Sfori în diagonală 73

6. *Clubul nautic* 77
   - Navigație fără vînt 79

Scanned with OKEN Scanner

Barca și sticla 80
Gin și sifon 82
Șlepul în ecluză 84
7. *Aeronautica* 87
Împotriva vîntului 89
Proiectilele călătoare 92
Aprovizionarea cu carburanți 94
Epilog 97

Scanned with OKEN Scanner